

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXXI - ANNO CLIII

(2014)

LIGUORI EDITORE

La pubblicazione è stata resa possibile dai contributi

- della Regione Campania
- della Fondazione Banco di Napoli
- del Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca
- del Ministero per i Beni Culturali
- dell'associazione "Amici della Società Nazionale di Scienze Lettere e Arti in Napoli"
- del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

N. 81 - Dicembre 2014

ISSN 0370-3568

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'Editore. Il regolamento per l'uso dei contenuti e dei servizi forniti dalla Casa Editrice Liguori disponibile al seguente indirizzo internet:

http://www.liguori.it/politiche_contatti/default.asp?c=legal

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascuna pubblicazione. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% per pubblicazione, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, telex 02 809506, e-mail segreteria@aidro.org

Direttore responsabile: Carlo Sbordone

© 2014 by Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Tutti i diritti sono riservati

Prima edizione italiana Dicembre 2014

Finito di stampare in Italia nel mese di Dicembre 2014 da Liguori Editore - Napoli

Autorizzazione del Tribunale di Napoli n. 780 del 14/08/1954

ISBN-13 978 - 88 - 207 - 6566 - 8

La carta utilizzata per la stampa di questo volume è inalterabile, priva di acidi, a pH neutro, conforme alle norme UNI EN Iso 9706 ∞, realizzata con materie prime fibrose vergini provenienti da piantagioni rinnovabili e prodotti ausiliari assolutamente naturali, non inquinanti e totalmente biodegradabili (FSC, PEFC, ISO 14001, Paper Profile, EMAS).

INDICE

L. D'Onofrio, L. Migliaccio, C. Sbordone, R. Schiattarella – <i>Chain Rule for planar bi-Sobolev maps.</i>	pag. 1
M.R. Celentani, A. Leone – <i>On the Maier-Schmid problem for nilpotent-by-finite groups.</i>	» 9
L. Carbone, M.R. Enea e N. Palladino – <i>Il fondo Maria Del Re e l'insegnamento della Geometria nell'Università di Napoli negli anni Venti e Trenta del Novecento.</i>	» 13
N.A. D'Auria – <i>Well-posed Stampacchia Type Quasi-variational Inequalities.</i>	» 61
E. Giarrusso – <i>A note on the asymptotic behaviour of large solutions and their gradient in a ball.</i>	» 73
G. Romano – <i>Beyond Feynman's troubles in Electromagnetics.</i>	» 81
A. Barbagallo, V. Esposito – <i>A priori estimate for a class of hyperbolic equations with double characteristics.</i>	» 115
L.A. Lomonaco – <i>A remark on the dual of the Steenrod algebra.</i>	» 123
A. D'Aniello – <i>Alcune considerazioni aritmetiche sull'ordine dei gruppi semplici di Suzuki.</i>	» 127
G. Romano – <i>On time and length in special relativity.</i>	» 139
G. Barone – <i>Le Conferenze delle Nazioni Unite e il 5° Rapporto dell'IPCC sulle Variazioni Climatiche.</i>	» 167
M.R. Formica, M. Pietroluongo, C. Sbordone – <i>Higher integrability from general Reverse Hölder Inequalities.</i>	» 183
A. Popoli, C. Sbordone – <i>A unified approach to exact embeddings of Muckenhoupt and Gehring classes.</i>	» 195
A. Ciampella – <i>On the fractal structure of the universal Steenrod algebra.</i>	» 203
G. Romano – <i>On natural derivatives and the curvature formula in fiber bundles.</i>	» 209
M. Rossi – <i>Il ruolo dell'anidride carbonica negli equilibri ecologici ed economici del pianeta terra.</i>	» 225
A. Giuditta – <i>The Human Telekinetic Capacities.</i>	» 237

Chain Rule for planar bi-Sobolev maps

Nota di L. D'Onofrio¹, L. Migliaccio², C. Sbordone² e R. Schiattarella²

Presentata dal socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 7 febbraio 2014)

Key words: bi-Sobolev maps, Jacobian.

Abstract - For a planar bi-Sobolev map f the zero set of the Jacobian may have positive measure while the regular set does have positive measure. We discuss the compatibility of these facts with the validity of the chain rule:

$$(\star) \quad J_{f^{-1}}(f(x)) J_f(x) = 1.$$

It turns out that the left hand side of $(\star)$ is uniquely defined a.e. as a Borel function. This is no more true for bi-Sobolev maps in $\mathbb{R}^n$ with $n \geq 3$.

Riassunto - L'insieme degli zeri dello Jacobiano di una mappa bi-Sobolev del piano può avere misura positiva mentre l'insieme dei punti di regolarità ha necessariamente misura positiva. In questa nota studiamo la compatibilità di tali risultati con la validità della chain rule.

1 - INTRODUCTION

Let Ω, Ω' be domains in $\mathbb{R}^2$. In the category of $W^{1,p}$ -Sobolev maps $f : \Omega \xrightarrow{\text{onto}} \Omega'$, $f \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $p \geq 1$, the case $p = 2$ due to its borderline character exhibits peculiar features, which are considered natural for many reasons. Beyond that natural setting and especially when $p = 1$, some fundamental properties fail and it is rather hard to recover the basic facts which actually require new proofs and methods far from routine. The discrepancy between the $W^{1,2}$ and the $W^{1,1}$ theories is clarified here in case of homeomorphisms.

The Sobolev class of homeomorphisms $f = (u, v) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ enjoys some important properties as:

¹Dipartimento di Statistica e Matematica per la Ricerca Economica, Università "Parthenope", Via Parisi 13, 80100 Napoli, Italy. donofrio@uniparthenope.it

²Università di Napoli "Federico II", Via Cintia, 80126 Napoli, Italy. lucia.migliaccio@unina.it, sbordone@unina.it, roberta.schiattarella@unina.it

- integration by parts against the Jacobian determinant $J_f(x)$, i.e.

$$\int_{\Omega} \varphi(u_x v_y - u_y v_x) = \int_{\Omega} u(\varphi_y v_x - v_y \varphi_x) = \int_{\Omega} v(\varphi_x u_y - \varphi_y u_x)$$

for any test function $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$;

- the (N) -property of Lusin, that is f maps sets of measure zero to sets of measure zero, briefly $f \in (N)$;
- the usual chain rule for the composition

$$J_f(f^{-1}(y)) J_{f^{-1}}(y) = 1$$

if f^{-1} is differentiable at y and f is differentiable at $f^{-1}(y)$.

On the other hand, the differentiability almost everywhere holds already for planar homeomorphisms in the Sobolev class $W^{1,1}$ (see Lehto, K. Virtanen (1971)). This is not true for $n \geq 3$; indeed, one can construct a nowhere differentiable homeomorphism in $W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (see Csörnyei et al. (2010)). Here, differentiability is understood in the classical sense.

Relevant work with regularity assumption below $W^{1,2}$ was done by Ziemer (Ziemer, 1969) who assumed (N) condition for f and f^{-1} . More recently such assumptions have been removed and many interesting results have been found by Hencl and Koskela (Hencl-Koskela, 2006) (see also (Hencl et al., 2006), (Csörnyei et al., 2010), (Hencl et al., 2009), (Greco et al., 2008)).

Each homeomorphism f in the Sobolev space $W_{loc}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ satisfies either $J_f \geq 0$ a.e. or $J_f \leq 0$ (see (Hencl, J. Malý, 2010), (Astala et al., 2008)). We shall assume that $J_f \geq 0$ a.e. in Ω .

For a homeomorphism $f \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, we decompose the domain Ω as follows:

$$\Omega = \mathcal{R}_f \cup \mathcal{Z}_f \cup \mathcal{E}_f,$$

where

$$\mathcal{R}_f = \{x \in \Omega : f \text{ is differentiable at } x \text{ and } J_f(x) \neq 0\}$$

is the set (possibly empty) of regular points of f ,

$$\mathcal{Z}_f = \{x \in \Omega : f \text{ is differentiable at } x \text{ and } J_f(x) = 0\}$$

is the set of singular points of f and

$$\mathcal{E}_f = \{x \in \Omega : f \text{ is not differentiable at } x\}.$$

Since f is continuous, these are Borel sets.

In (Hencl et al., 2009) a particularly useful class of homeomorphisms which lie between homeomorphisms of bounded variation and bi-Lipschitz mappings was introduced, namely the *bi-Sobolev mappings* (see (Hencl-Koskela, 2014) for a rich and updated account of the theory which relates these maps with those of finite distortion).

Definition 1. The homeomorphism $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{onto}} \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ is a bi-Sobolev map if $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ and $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega', \mathbb{R}^2)$.

Here our aim is to study the limits of validity for bi-Sobolev maps of the chain rule for the pointwise Jacobian of the compositions $f \circ f^{-1}$ and $f^{-1} \circ f$, namely

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x) = 1 \quad (1.1)$$

and

$$J_f(f^{-1}(y))J_{f^{-1}}(y) = 1 \quad (1.2)$$

Of course, (1.1) is true if $x \in \mathcal{R}_f$. Similarly, (1.2) is valid if f^{-1} is differentiable at y and $J_{f^{-1}}(y) \neq 0$.

It is interesting to note that any bi-Sobolev map in the plane has a set of regular points of positive measure (see Proposition 2.2); this means $|\mathcal{Z}_f| < |\Omega|$.

In the literature, there are some examples of bi-Sobolev mappings such that the Jacobian of f is zero on a set of positive measure (see (Ponomarev, 1987), (Iwaniec-Martin, 2002), (Iwaniec-Martin, 2001)). How are these examples consistent with (1.1) and (1.2)? The answer to this question is given by the following

Theorem 1.1. *Let $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{onto}} \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ be a bi-Sobolev map; then we can define $J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)$ uniquely as a measurable function by*

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathcal{R}_f \\ 0 & \text{if } x \in \mathcal{Z}_f \end{cases} \quad (1.3)$$

Remark 1.1. We would like to underline that the composition of two maps $h \circ g, g : \Omega \rightarrow \Omega', h : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ with the outer map h defined a.e., may be undefined on a set of positive measure $P \subset \Omega$. Indeed, $J_{f^{-1}} \circ f$ is sensitive to changes of $J_{f^{-1}}$ on subsets of Ω with zero Lebesgue measure. This poses some problems for the definition and the measurability of the composition $J_{f^{-1}} \circ f$.

Remark 1.2. Of course analogous formula is valid for $J_f(f^{-1}(y))J_{f^{-1}}(y)$ for a.e. $y \in \Omega'$.

2 - PRELIMINARIES

By Gehring-Lehto theorem, a planar homeomorphism $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ is differentiable a.e. (see (Gehring-Lehto, 1959)). Hence, using the notation introduced above:

$$|\mathcal{E}_f| = 0.$$

If $x \in \mathcal{R}_f$, then f^{-1} is differentiable at $f(x)$ and moreover we have

$$f(\mathcal{R}_f) = \mathcal{R}_{f^{-1}} \quad (2.1)$$

If $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ is a homeomorphism and η is a nonnegative Borel measurable function on $\mathbb{R}^2$, the following *area inequality* holds

$$\int_B \eta(f(x)) J_f(x) dx \leq \int_{f(B)} \eta(y) dy \quad (2.2)$$

for every $B \subset \Omega$ Borel set ((Federer, 1969, Theorem 3.1.8)).

However, the (N) property of Lusin is equivalent to the *area formula*, that is,

$$\int_B \eta(f(x)) J_f(x) dx = \int_{f(B)} \eta(y) dy, \quad (2.3)$$

for all such functions η .

It is well known (see (Hencl et al., 2009), for example) that there exists a set $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ of full measure such that the area formula always holds for f on $\tilde{\Omega}$. Notice that the area formula holds on the set $\mathcal{R}_f \cup \mathcal{Z}_f$ where f is differentiable ((Hencl-Koskela, 2014, Corollary A.2)). As a consequence, we have the equality

$$\int_{\mathcal{Z}_f} J_f dx = |f(\mathcal{Z}_f)|$$

which implies the following version of the Sard's Lemma

$$|f(\mathcal{Z}_f)| = 0. \quad (2.4)$$

Proposition 2.1. *Let $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{onto}} \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ be a bi-Sobolev map. Then*

$$J_f = 0 \text{ a.e.} \iff J_{f^{-1}} = 0 \text{ a.e.} \quad (2.5)$$

Proof. Indeed, by area formula for Sobolev homeomorphisms, there exists $N_0 \subset \Omega$ with zero measure such that

$$\int_{\Omega \setminus N_0} J_f dx = |f(\Omega \setminus N_0)|$$

Since $J_f = 0$ a.e. then

$$0 = |f(\Omega \setminus N_0)| = |\Omega' \setminus f(N_0)|$$

and

$$\int_{f(N_0)} J_{f^{-1}} dy \leq |N_0| = 0$$

It implies that $J_{f^{-1}} = 0$ a.e. By symmetry we obtain the other implication. $\square$

The next Proposition was proved in (Hencl, 2011) using the language of mappings of finite distortion. The same result with a different proof was proved in (Di Gironimo et al., 2011).

Theorem 2.1. *If $f = (u, v)$ is a $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ -homeomorphism, then $f^{-1} = (s, t) \in BV(\Omega', \mathbb{R}^2)$ and*

$$\begin{aligned} |\nabla s|(\Omega') &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| dz \\ |\nabla t|(\Omega') &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right| dz. \end{aligned}$$

Here $|\nabla s|(\Omega')$ and $|\nabla t|(\Omega')$ are the total variations of the coordinate functions of the inverse f^{-1} .

For the sake of completeness we present here the proof of the following

Proposition 2.2. *If f is a planar bi-Sobolev map, then $0 < |\mathcal{R}_f|$.*

Proof. We prove that $|\mathcal{R}_f| > 0$ by showing that $|\mathcal{Z}_f| < |\Omega|$. Suppose by contradiction that the pathological equality

$$|\mathcal{Z}_f| = |\Omega|$$

holds. By (2.5), $|\mathcal{Z}_{f^{-1}}| = |\Omega'|$ and hence there exists $N'_0 \subset \Omega' : |N'_0| = 0$ such that

$$\int_{\Omega' \setminus N'_0} J_{f^{-1}} dy = |\Omega \setminus f^{-1}(N'_0)| = 0$$

It means that f^{-1} sends the null set N'_0 to a set $f^{-1}(N'_0)$ of full measure. By regularity properties of Lebesgue measure there exists a closed set $C \subset f^{-1}(N'_0)$ such that $|C| > 0$. Define $C' = f(C)$ and notice that it is a closed subset of N'_0 with zero measure: $|C'| = 0$. Denoting by $f = (u, v)$ and $f^{-1} = (s, t)$, we apply Theorem 2.1 to the open set $A' = \Omega' \setminus C'$, recalling that, as the inverse belongs to $W^{1,1}$ by assumption the variation coincide with the integral of the gradient of the coordinate functions, to obtain:

$$\begin{aligned} \int_{A'} |\nabla s| &= \int_{f^{-1}(A')} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \\ \int_{A'} |\nabla t| &= \int_{f^{-1}(A')} \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right| \end{aligned}$$

Therefore, we get

$$\begin{aligned} \int_{C'} |\nabla s| &= \int_{\Omega'} |\nabla s| - \int_{A'} |\nabla s| \\ &= \int_{f^{-1}(\Omega')} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| - \int_{f^{-1}(A')} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| = \int_{f^{-1}(C')} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| > 0 \end{aligned}$$

because $|C'| = 0$ and $|f^{-1}(C')| > 0$. This means that ∇s is not absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and $f^{-1} \notin W^{1,1}_{loc}$ which gives the contradiction. $\square$

Remark 2.1. Proposition 2.2 is false in dimension $n = 3$ as derives by a recent example of a bi-Sobolev map f such that $|\mathcal{R}_f| = |\mathcal{R}_{f^{-1}}| = 0$ (see (D'Onofrio et al., to appear)).

3 - CHAIN RULE FOR THE POINTWISE JACOBIAN

Proposition 3.1. *Let $f : \Omega \xrightarrow{\text{onto}} \Omega'$ be a planar bi-Sobolev map. Then the following statements are equivalent:*

1) f^{-1} does not satisfy the Lusin condition

$$2) |\mathcal{Z}_f| > 0$$

$$3) |f^{-1}(\mathcal{E}_{f^{-1}})| > 0$$

Proof. 1) $\implies$ 2) If f^{-1} does not satisfy (N) condition, there exists a Borel set $A \subset \Omega$ such that $|A| > 0$ and $|f(A)| = 0$. By (2.2)

$$\int_A J_f dx \leq |f(A)| = 0$$

and therefore $J_f = 0$ for almost every $x \in A$. Hence,

$$|A \setminus \mathcal{Z}_f| = 0.$$

2) $\implies$ 3) By (2.1) we have

$$f^{-1}(\mathcal{Z}_{f^{-1}}) \cup f^{-1}(\mathcal{E}_{f^{-1}}) = f^{-1}(\mathcal{Z}_{f^{-1}} \cup \mathcal{E}_{f^{-1}}) = \mathcal{Z}_f \cup \mathcal{E}_f. \quad (3.1)$$

Hence, essentially, f^{-1} maps $\mathcal{E}_{f^{-1}}$ to $\mathcal{Z}_f$ in the sense that, as (3.1) yields

$$f^{-1}(\mathcal{E}_{f^{-1}}) \Delta \mathcal{Z}_f = (f^{-1}(\mathcal{E}_{f^{-1}}) \setminus \mathcal{Z}_f) \cup (\mathcal{Z}_f \setminus f^{-1}(\mathcal{E}_{f^{-1}})) \subset \mathcal{E}_f \cup f^{-1}(\mathcal{Z}_{f^{-1}})$$

and we have

$$|f^{-1}(\mathcal{E}_{f^{-1}}) \Delta \mathcal{Z}_f| = 0 \quad (3.2)$$

that implies

$$|f^{-1}(\mathcal{E}_{f^{-1}})| = |\mathcal{Z}_f|$$

3) $\implies$ 1) As f^{-1} is differentiable almost everywhere, then $|\mathcal{E}_{f^{-1}}| = 0$. Hence, f^{-1} sends the null set $\mathcal{E}_{f^{-1}}$ onto a set of positive measure and this means that f^{-1} does not satisfy Lusin condition. $\square$

Now we are in position to prove Theorem 1.1.

Proof of Theorem 1.1. It is irrelevant to define $J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)$ for $x \in \mathcal{E}_f$ because bi-Sobolev map in the plane satisfies $|\mathcal{E}_f| = 0$ by Gehring-Lehto Theorem.

For all $x \in \mathcal{R}_f$, the differential matrices of f and f^{-1} are inverse to each other, namely:

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1} \quad \forall x \in \mathcal{R}_f \quad (3.3)$$

and

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathcal{R}_f. \quad (3.4)$$

It remains to study $J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)$ for $x \in \mathcal{Z}_f$.

If $|\mathcal{Z}_f| > 0$, the function $J_{f^{-1}} \circ f$ a priori is not well defined. Indeed, by Sard's Lemma $|f(\mathcal{Z}_f)| = 0$ and we can choose arbitrarily $J_{f^{-1}}$ on $f(\mathcal{Z}_f)$, that is $J_{f^{-1}}(f(x))$ for x belonging to the positive set $\mathcal{Z}_f$ and the composed function $J_{f^{-1}} \circ f$ may be non measurable on the set of positive measure $\mathcal{Z}_f$. In fact as x varies in $\mathcal{Z}_f$, we are dealing with points $f(x)$ filling a zero subset of Ω' and so we can redefine $J_{f^{-1}}$ arbitrarily on such zero subset. However, the product

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)$$

is zero as $J_f(x) = 0$ for $x \in \mathcal{Z}_f$.

On the other hand, if $|\mathcal{Z}_f| = 0$, by Proposition 3.1, f^{-1} satisfies Lusin ($\mathcal{N}$) condition and the image of a null set is a null set. Therefore, the composition $J_{f^{-1}} \circ f$ has a meaning as a measurable function. As $|\mathcal{Z}_f| = 0$ then $|\mathcal{R}_f| = |\Omega|$ and by (3.4) follows that

$$J_{f^{-1}}(f(x)) J_f(x) = 1 \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \quad (3.5)$$

The definition (1.3) is of course the unique possible to get a measurable function. $\square$

Remark 3.1. Formula (1.3) may be ambiguous for $n = 3$; the reason is that there exists a bi-Sobolev map f that is nowhere differentiable together with its inverse ((Csörnyei et al., 2010)), and so $|\mathcal{E}_f| = |\Omega|$. Hence one can define $(J_{f^{-1}} \circ f) J_f = \chi_{\mathcal{R}_f \cup \mathcal{E}_f}$ or $(J_{f^{-1}} \circ f) J_f = \chi_{\mathcal{R}_f}$ and these two functions disagree almost everywhere.

ACKNOWLEDGEMENT

We thank prof. J.M.Ball for the stimulating questions he addressed to the third and the fourth author, after their Lectures at the Conference “Vector-valued Partial Differential Equations and Applications CIME-EMS Summer School” dedicated to prof. B. Dacorogna in occasion of his 60th birthday, Cetraro, It, 8–12, 2013.

The authors have been supported by the Gruppo Nazionale per l’Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) of the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM)

References

- K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin. *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*, Princeton Mathematical Series vol. 24, (2008).
- J. M. Ball, *Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 88 (1981), no. 3-4, 315–328.
- B. Bojarski, T. Iwaniec: *Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 8, 2, (1983), 257–324.
- R. Cerný, *Homeomorphism with zero Jacobian: Sharp integrability of the derivative*, J. Math. Anal. Appl. 373, (2011), 161–174.
- M. Csörnyei, S. Hencl, J. Malý: *Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$* , J. Reine Angew. Math., 644, (2010), 221–235.
- P. Di Gironimo, L. D’Onofrio, C. Sbordone, R. Schiattarella: *Anisotropic Sobolev homeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 36, (2011), 593–602.
- L. D’Onofrio, S. Hencl and R. Schiattarella, *Bi-Sobolev homeomorphism with zero Jacobian almost everywhere*, Calc. Var., (to appear). DOI 10.1007/s00526-013-0669-6.
- L. D’Onofrio, C. Sbordone and R. Schiattarella, *The Grand Sobolev homeomorphisms and their measurability properties*, Advanced Nonlinear Studies, 12 (2012), no. 4, 767–782.
- H. Federer: *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer - Verlag, New York (1969) (Second edition 1996).

- N. Fusco, G. MoscarIELLO, C. SbORDONE: *The limit of $W^{1,1}$ -homeomorphisms with finite distortion*, Calc. Var. , 33, (2008), 377-390.
- F. W. Gehring and O. Lehto: *On the total differentiability of functions of a complex variable*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 272, (1959), 1–9.
- L. Greco, C. SbORDONE and C. Trombetti, *A note on planar homeomorphisms*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 75 (2008), 53–59.
- P. Hajlasz, *Change of variables formula under minimal assumptions*, Coll. Math. 64 (1993), no. 1, 93–101.
- J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.
- S. Hencl: *Sharpness of the assumptions for the regularity of a homeomorphism*, Michigan Math. J. 59 (2010), no. 3, 667–678.
- S. Hencl: *Sobolev homeomorphism with zero Jacobian almost everywhere*, J. Math. Pures Appl. (9) 95 (2011), no. 4, 444-458.
- S. Hencl and P. Koskela: *Lecture notes on Mappings of finite distortion*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, vol. 2096, (2014).
- S. Hencl, P. Koskela: *Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism*, Arch. Ration. Mech. Anal., 180, (2006), 75-95.
- S. Hencl, P. Koskela and J. Malý: *Regularity of the inverse of a Sobolev homeomorphism in space*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 136:6, (2006), 1267-1285.
- S. Hencl, J. Malý: *Jacobians of Sobolev homeomorphisms*, Calc. Var. Partial Differential Equations 38 (2010), no. 1–2, 233–242.
- S. Hencl, G. MoscarIELLO, A. Passarelli di Napoli and C. SbORDONE: *Bi-Sobolev mappings and elliptic equations in the plane*, J. Math. Anal. Appl., 355, (2009), 22-32.
- T. Iwaniec and G. Martin, *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2001.
- T. Iwaniec and G. Martin, *Squeezing the Sierpin'ski sponge*, Studia Math. 149 (2002), no. 2, 133–145.
- O. Lehto, K. Virtanen: *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer- Verlag, Berlin, (1971).
- O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. 448 (1969), 1–40.
- S. P. Ponomarev, *Property N of homeomorphism in the class $W^{1,p}$* , Transl. Sibirskii Math., 28, (2) (1987), 140–148.
- Yu. G. Reshetnjak, *Spatial mappings with bounded distortion*. Sibirsk. Mat. Z. 8, (1967) 629–658.
- W.P. Ziemer: *Change of variables for absolutely continuous functions*, Duke Math. J. ,36:1, (1969), 171–178.

On the Maier-Schmid Problem for nilpotent-by-finite groups

Maria Rosaria Celentani¹ e Antonella Leone^{1,2}

Presentata dal socio Francesco de Giovanni
(Adunanza del 7 marzo 2014)

Key words: Permutable subgroup, hypercentral embedding, nilpotent-by-finite groups.

Abstract - We show that a core-free, permutable subgroup of a nilpotent-by-finite group is contained in the hypercentre if it is periodic or satisfies some related condition.

Riassunto - Si dimostra che un sottogruppo permutabile a nocciolo identico in un gruppo nilpotente-per-finito è contenuto nell'ipercentro di questo se è periodico o soddisfa una condizione correlata.

1 – INTRODUCTION

Let G be a group. A subgroup $H \leq G$ is said to be *permutable*, or *quasinormal*, in G if and only if $HK = KH$ for all $K \leq G$. Permutable subgroups satisfy relevant embedding properties. By an old theorem due to Ore they are subnormal if the ambient group is finite (Ore, 1939), or more generally finitely generated, and ascendant in the general case (Stonehewer S.E., 1972). Ore's theorem was significantly strengthened by Maier and Schmid (Maier-Schmid, 1973), who proved that core-free permutable subgroups of a finite group G are always contained in the hypercentre of G . The analogous result may fail to hold if G is infinite, even if G is finitely generated (Busetto-Napolitani, 1992), or metabelian (Celentani et al., 2006). Nonetheless, this result has been proved for some classes of infinite groups. The first major result of this kind is due to Lennox (Lennox, 1983), who proved that Maier-Schmid Theorem holds under the hypothesis that G is finitely generated, soluble-by-finite and residually finite. More extensions of the theorem

¹Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Via Cintia — Monte S. Angelo, I-80126 Napoli, Italy. E-mail: celentan@unina.it, anleone@unina.it

²Author to whom correspondence should be addressed

to classes of infinite groups are in (Seneviratne, 1985), (Celentani-Leone, 1998) and (Celentani et al., 2006). One of the results in the latter paper is that Maier-Schmid Theorem holds for abelian-by-finite groups. More precisely, if G is an abelian-by-finite group then every core-free permutable subgroup of G is contained in $Z_{\omega_2}(G)$. The question of whether the same result holds in the case of nilpotent-by-finite groups was left open in (Celentani et al., 2006). Here we shall provide a partial answer in the affirmative, by proving that every periodic, core-free permutable subgroup H of a nilpotent-by-finite group G is contained in the hypercentre of G . When G is not periodic the same conclusion can be drawn in the more general hypothesis that the isolator of H in G is not the whole of G .

2 – RESULTS

We start by collecting some known results on permutable subgroups that we shall use in our proofs.

Lemma 1 ((Stonehewer S.E., 1972), Lemma 2.2). *Let H be a permutable subgroup of a group G . If x is an element of infinite order of G such that $H \cap \langle x \rangle = 1$, then x normalizes H .*

Lemma 2 ((Celentani et al., 2006), Proposition 1). *Let H be a core-free permutable subgroup of a locally residually finite group G . If H has finitely many conjugates in G , then H^G is finite and $H \leq Z_n(G)$ for some positive integer n .*

Lemma 3 ((Schmidt R., 1994), Theorem 6.3.1; (Celentani et al., 2006), Theorem 2). *Let H be a periodic, core-free permutable subgroup of a group G . Then H^G is a periodic locally nilpotent group. Moreover, for each prime p , if H_p and $(H^G)_p$ are the p -components of H and H^G respectively,*

- (i) H_p is permutable in G ;
- (ii) $(H^G)_p = (H_p)^G$;
- (iii) if G is locally finite, then $G/C_G((H^G)_p)$ is a p -group.

Recall that the *isolator* $I_G(H)$ of a subgroup H of a group G is the set of all elements $g \in G$ such that $g^n \in H$ for some positive integer n . As is well-known, $I_G(H)$ is usually not a subgroup of G , but it certainly is, for instance, when G is nilpotent.

Proposition. *Let H be a core-free, permutable subgroup of the nilpotent-by-finite group G . If $I_G(H) \neq G$ then H^G is finite and $H \leq Z_n(G)$ for some positive integer n .*

Proof. Let N be a nilpotent normal subgroup of finite index in G . From $I_G(H) \neq G$ it is immediate to deduce that $J := I_N(N \cap H) \neq N$. But J is a subgroup of N , hence N is generated by the elements of $N \setminus J$, that is, nonperiodic elements x such that $H \cap \langle x \rangle = 1$. Hence $H \triangleleft HN$, by Lemma 1, so $|G : N_G(H)|$ is finite. Now, G is locally residually finite, because all finitely generated subgroups of G are polycyclic-by-finite. Therefore H^G is finite and $H \leq Z_n(G)$ for some $n \in \mathbb{N}$, by Lemma 2. $\square$

Theorem. *Let H be a periodic, core-free permutable subgroup of the nilpotent-by-finite group G . Then $H \leq \bar{Z}(G)$. More precisely, $H \leq Z_{\omega(c+1)}(G)$, where c is the least integer such that G has a nilpotent subgroup of finite index and class c .*

Proof. Let c be as in the statement, and let F be a subgroup of G of finite index which is nilpotent of class c . We may replace F with F_G , so there is no loss of generality in assuming $F \triangleleft G$. If G is not periodic the result is an obvious consequence of the Proposition. So we may assume that G is periodic, and hence locally finite. Lemma 3 shows that H is locally nilpotent and every primary component of H is permutable in G . Thus, to complete our proof it will be enough to show that $H \leq Z_\alpha(G)$ for some ordinal $\alpha < \omega(c+1)$ if H is a p -group, a hypothesis that we assume from now on. By Lemma 3 again, H^G and $G/C_G(H^G)$ also are p -groups. The subgroup $H^G \cap F$ has a G -invariant series of length c at most, whose factors are central in F . If A/B is one of such factors and $C = C_G(A/B)$, then $F \leq C$, hence G/C is finite, and $C_G(H^G) \leq C$, hence G/C is a p -group. Since A/B is an abelian p -group, it easily follows that $A/B \leq Z_\omega(G/B)$. Therefore $H^G \cap F \leq Z_{\omega c}(G)$. Now $H^G/(H^G \cap F)$ is a finite p -group on which G acts by means of a (necessarily finite) p -group of automorphisms. Hence $H^G/(H^G \cap F) \leq Z_n(G/(H^G \cap F))$ for some integer n . Thus $H^G \leq Z_{\omega c+n}(G)$. The proof is complete. $\square$

References

- Busetto G. and Napolitani F., *On some questions concerning permutable subgroups of finitely generated groups and projectivities of perfect groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **87** (1992), 303–305.
- Celentani M.R. and Leone A., *On quasinormal subgroups of infinite groups*, Ricerche Mat., **47** (1998), 205–211.
- Celentani M.R., Leone A. and Robinson D.J.S., *The Maier-Schmid problem for infinite groups*, J. Algebra, **301** (2006), 294–307.
- Lennox J.C., *On quasinormal subgroups of certain finitely generated groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **26** (1983), 25–28.
- Maier R. and Schmid P., *The embedding of quasinormal subgroups in finite groups*, Math. Z., **131** (1973), 269–272.
- Ore O., *Contributions to the theory of groups of finite order*, Duke Math. J., **5** (1939), 431–460.
- Schmidt R., *Subgroup lattices of groups*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, Germany, 1994.
- Seneviratne H.H.G., *On permutable subgroups of soluble minimax groups*, Arch. Math. (Basel), **44** (1985), 481–484.
- Stonehewer S.E., *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), 1–16.

Il fondo Maria Del Re e l'insegnamento della Geometria nell'Università di Napoli negli anni Venti e Trenta del Novecento

Luciano Carbone^{1*}, Maria Rosaria Enea² e Nicla Palladino³

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 7 marzo, 2014)

Key words: History of Mathematics, Caccioppoli's letters, Del Pezzo's letters, collections of Analytic and Projective Geometry drawings.

Abstract - In this work, we describe the Maria Del Re's papers. Maria Del Re was assistant professor of Projective Geometry at University of Naples. They include relevant letters of some mathematicians of the last century, e. g. Caccioppoli and Del Pezzo. The papers also contain several collections of drawings linked to Analytic and Projective Geometry teaching. These drawings were performed by students, as it was usual up to the Fifties of twentieth century. It seems that at present time a few collections of this kind are yet kept.

Riassunto – In questo lavoro descriviamo il fondo Maria Del Re, che fu assistente alla cattedra di Geometria proiettiva dell'università di Napoli. Questo fondo, tra i vari materiali, contiene numerose lettere di matematici del secolo passato, tra i quali Caccioppoli e Del Pezzo. Di particolare interesse sembrano essere alcune collezioni di disegni relativi all'insegnamento della Geometria analitica e proiettiva. Questi disegni

¹Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Complesso Universitario di Monte Sant'Angelo, Via Cintia, Napoli.

*Corrispondenza a luciano.carbone@unina.it.

²Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia, Università degli Studi della Basilicata, Macchia Romana, via dell'Ateneo Lucano, Potenza.

³Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo, Via Archirafi, Palermo.

furono eseguiti da studenti, come era solito fino agli anni Cinquanta del Novecento. Sembra che non molte di queste collezioni si siano conservate.

1 – INTRODUZIONE

Maria Del Re (Reggio Calabria, 1894-Napoli 1970) fu a lungo assistente di Pasquale Del Pezzo alla cattedra di Geometria proiettiva dell'università di Napoli e professore incaricato di varie discipline matematiche presso la stessa università. La sua vita, i suoi studi e la sua carriera sono delineati in (Carbone, Talamo 2010a).

Per circa quaranta anni dopo la sua morte, i familiari, il senatore Luigi Marino, marito di sua figlia adottiva Ester Paola De Pascale prematuramente scomparsa, sua cognata Ester Amato (moglie del fratello Eduardo) e sua nipote Maria Carmela Del Re hanno custodito molte delle sue carte tra i documenti di famiglia. A partire dal 2010, in varie riprese ne hanno donato la parte più significativa, man mano che questi materiali venivano riordinati, al Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli” dell'Università di Napoli “Federico II”, sia sotto forma di originali sia, talora, in copia. Un primo elenco, assai sommario, di tali documenti è stato dato in (Carbone *et al.* 2010b). Tali donazioni sembrano ora avere esaurito il fondo. I materiali in esso contenuti, che peraltro non sono particolarmente numerosi, vengono in questa nota compiutamente descritti e delle lettere inedite viene dato un regesto.

Alcune parti del fondo, in particolare la raccolta epistolare che sembra essere la più interessante tra quelle presenti, le lettere cioè inviate da Renato Caccioppoli alla Del Re e alcuni documenti correlati, sono stati pubblicati nella già citata nota (Carbone *et al.* 2010b). Il fondo è stato anche ampiamente utilizzato in (Carbone, Talamo 2010a).

I materiali del fondo, pur nella loro esiguità, consentono in ogni caso di avere un punto di vista su personaggi assai significativi, quali Pasquale Del Pezzo e Renato Caccioppoli⁴, molto diverso da quello usuale. Si tratta in effetti di un punto di vista per così dire dal basso, dato il notevole dislivello di funzioni tra le personalità coinvolte: è il punto di vista, si potrebbe quasi dire, degli “assistenti”, sia pure di assistenti di notevoli capacità tecniche e più in generale culturali.

2 - LE ARTICOLAZIONI DEL FONDO

⁴Per la rilevanza della figura di Caccioppoli si può consultare l'ampia bibliografia presente in (Carbone, Talamo 2010b); per quella di Del Pezzo il notevole articolo, anche questo con ampia bibliografia, (Ciliberto, Sallent Del Colombo 2013).

Il fondo può articolarsi in varie sezioni a seconda della natura dei materiali. Una prima sezione è costituita da raccolte epistolari, una seconda dalle raccolte di disegni, una terza da materiale miscelaneo.

Nel seguito verranno esaminate separatamente le varie sezioni.

Per quanto concerne la sezione epistolare, i materiali saranno distinti per corrispondente; verrà data di ciascuna lettera, quando possibile, data e luogo di invio e sarà fornito, per ciascun corrispondente, un breve sommario complessivo degli argomenti trattati.

Per quanto concerne l'analisi della seconda sezione, essa sarà preceduta da un inquadramento complessivo sull'organizzazione degli studi di geometria presso l'università di Napoli negli anni Venti e Trenta del Novecento. Verrà poi data una descrizione analitica delle raccolte di disegni.

La terza sezione è costituita da materiale iconografico, da alcune composizioni poetiche di natura scherzosa di differenti autori e da qualche documento personale concernente gli studi e le attività accademiche di Maria Del Re e di qualche suo familiare.

3 - PRIMA SEZIONE: I MATERIALI EPISTOLARI

I Corrispondenza epistolare tra Maria Del Re e Luigi Berzolari.

(a) Berzolari a Del Re.

(1) 13 febbraio 1924, Pavia;

ringrazia per l'invio di alcuni lavori e segnala che un risultato ottenuto dalla Del Re era già stato pubblicato da Noether.

II Corrispondenza epistolare tra Maria Del Re e Renato Caccioppoli.

Questa corrispondenza epistolare è costituita da venti lettere di Renato e quattro minute di Maria. Esse, come accennato, sono state pubblicate in (Carbone, Talamo 2010b). Anche di queste per completezza forniamo data e luogo di invio e un cenno, brevissimo, complessivo del contenuto. Risalgono, quasi tutte, al periodo durante il quale Renato Caccioppoli, appena vincitore di una cattedra universitaria fu a Padova. Sono di carattere personale, di tono scherzoso, ma con significativi riferimenti agli avvenimenti dell'epoca. Lumeggiano assai bene il carattere del celebre matematico, almeno nella sua giovinezza.

(a) Caccioppoli a Del Re.

- (1) 14 gennaio 1931, Padova;
- (2) 20 gennaio 1931, Padova;
- (3) 30 gennaio 1931, Padova;
- (4) 26 maggio 1931, Padova;
- (5) 15 luglio 1931, Padova;
- (6) 22 luglio 1931, Padova;
- (7) 18 ottobre (senza anno ma 1931), Padova;
- (8) 22 gennaio 1932, Padova;
- (9) 26 aprile 1932, Padova;
- (10) 13 novembre 1932, (senza luogo ma Padova);
- (11) 19 novembre 1932, Padova;
- (12) 3 dicembre 1932, Padova;
- (13) 5 febbraio 1933, Padova;
- (14) 7 dicembre 1933, Padova;
- (15) 7 giugno 1934, Padova;
- (16) 25 giugno 1934, Padova;
- (17) 30 Ottobre 1934, Padova;
- (18) 17 agosto, (senza anno ma 1940), Napoli;
- (19) 15 settembre (senza anno ma 1940), Napoli;
- (20) (senza luogo, senza data ma Napoli).

(b) Del Re a Caccioppoli.

- (1) 20 aprile 1931, (senza luogo ma Napoli);
- (2) 10 maggio 1931, (senza luogo ma Napoli);
- (3) 11 maggio 1931, (senza luogo ma Napoli);
- (4) (senza luogo, senza data, frammentaria).

III Corrispondenza epistolare tra Gianfranco Cimmino e Maria del Re.

Essa è costituita da una lettera di Gianfranco a Maria, anch'essa pubblicata in (Carbone, Talamo 2010b) e dalla minuta di una lettera che Maria Del Re inviava congiuntamente a Cimmino e Giuseppe Scorza Dragoni. La lettera di Cimmino ha carattere personale e si riferisce essenzialmente ai rapporti tra Caccioppoli e la Del Re.

(a) Cimmino a Del Re.

- (1) 13 (senza mese e anno, ma presumibilmente 1939), Cagliari;

la lettera ha carattere personale e si riferisce essenzialmente ai rapporti tra Caccioppoli e la Del Re.

(b) Del Re a Cimmino.

(1) Senza data, senza luogo;

accenna scherzosamente a un periodo di tempo che Cimmino e Scorza stanno trascorrendo in un paese di lingua tedesca; ricorda le partite a scacchi giocate con lei e Del Pezzo.

Come segnalato la lettera è inviata congiuntamente a Gianfranco Cimmino e Gaetano Scorza.

IV Corrispondenza epistolare tra Pasquale Del Pezzo e Maria Del Re.

Si tratta di 30 lettere inviate da Pasquale Del Pezzo a Maria Del Re. Argomenti principali delle lettere sono l'organizzazione del corso di Geometria proiettiva e le ricerche scientifiche alle quali Maria si stava dedicando sotto la guida di Del Pezzo. E' presente qualche spunto di cronaca, legato alla carica di senatore tenuta da Del Pezzo e alla complessa situazione politica italiana agli inizi degli anni Venti.

(a) Del Pezzo a Del Re.

(1) 8 agosto 1921, (senza luogo, ma timbro postale Caianello) [si tratta di una cartolina postale illustrata che raffigura le rovine del Castello del Duca di Caianello (e dunque di Pasquale Del Pezzo), in particolare il maschio e la torre dal lato di nord-ovest];

trasmette saluti e ringraziamenti di sua moglie ammalata.

(2) 10 luglio 1922, Casamicciola;

sta facendo una cura di acque e affida alla Del Re varie incombenze riguardanti il gabinetto di geometria proiettiva.

(3) 6 settembre 1922, Caianello [si tratta di una cartolina postale illustrata che raffigura le rovine del Castello del Duca di Caianello (e dunque di Pasquale Del Pezzo), in particolare il maschio e la torre dal lato di nord-ovest];

chiede notizie sulla tesi che la Del Re sta preparando e dà notizie su una trasformazione geometrica che stanno studiando.

(4) 12 novembre 1923 (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

dà istruzioni sulle esercitazioni al suo corso che la Del Re va a fare e suggerimenti sulle ricerche in corso.

(5) 22 novembre 1923, (senza luogo ma su cartolina postale intestata Senato del Regno, con timbro postale del Senato e dunque Roma);

riprende i temi della lettera precedente.

(6) 30 aprile 1924, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

accenna ad un processo in atto davanti al senato costituito come Alta Corte; accenna allo studio di un luogo generico; racconta di aver cercato di spiegare ad un collega senatore, giurista di professione, le proprietà dell'unità immaginaria.

(7) 8 dicembre 1924, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

annuncia che presenterà nella riunione di dicembre all'Accademia una nota della Del Re e chiede notizie su un problema che le ha proposto.

(8) 12 luglio 1925, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

commenta alcune ricerche comunicategli dalla Del Re e dà qualche suggerimento.

(9) 16 dicembre 1925, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

comunica alcuni risultati da lui ottenuti riguardanti l'estensione di "proprietà di cerchi ortotici ai triedri e trispigoli circoscritti ad una quadrica".

(10) 9 giugno 1926, (senza luogo ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

accenna ad una riunione "importantissima" del Senato e dà suggerimenti su come dare altre versioni del teorema di Pascal; suggerisce anche di studiare "due triangoli i cui nove punti danno la conica e la retta di Pascal".

(11) 12 settembre 1926, (senza luogo, con timbro postale Caianello);

dà chiarimenti concernenti alcuni problemi di geometria proiettiva.

(12) 17 novembre 1926, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

accenna ai suoi studi su un teorema di Riemann, tra una seduta e l'altra del Senato.

(13) 8 luglio 1927, (senza luogo);

descrive la sua giornata e dà notizia su progressi nello studio di alcuni sistemi tripli.

(14) 14 luglio 1927, (senza luogo);

dà istruzioni per un esercizio di omologia e annuncia la morte del cognato Mittag Leffler accenna al desiderio del figlio Gaetano di partire per la Svezia per rendere omaggio alla salma dello zio.

(15) 12 agosto 1927, (senza luogo, ma timbro postale Napoli);

annuncia di star preparando esercizi sulle omologie tra piani o spazi nelle quali i punti all'infinito si corrispondono.

(16) 7 settembre 1927, (senza luogo, ma timbro postale Napoli);

prende accordi per discutere un lavoro al quale si sta dedicando la Del Re.

(17) 4 maggio 1928, (senza luogo, ma timbro postale del Senato del Regno e dunque Roma);

chiede notizie su varie vicende.

(18) 6 maggio 1928, (senza luogo, ma timbro postale del senato del Regno e dunque Roma);

discute in forma assai cauta e riposta di talune questioni universitarie accenna a delle proprietà che sta studiando di infiniti "triangoli formanti serie l'uno circoscritto all'altro nei due versi e tutti con il medesimo baricentro."

(19) 8 maggio 1928, (senza luogo, ma timbro postale del Senato del Regno e dunque Roma);

lamenta l'assenza di risposta alla sua lettera precedente.

(20) 14 dicembre 1928, (senza luogo, ma su cartolina postale intestata Senato del Regno, timbro postale Senato del Regno e dunque Roma) [la cartolina è danneggiata];

accenna a una questione riguardante un'omologia.

(21) 14 maggio 1929, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

accenna alla vendita di una sua proprietà all'ente provinciale e prega la Del Re di seguire la vicenda.

(22) 21 giugno 1929, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

preannuncia qualche risultato al quale si può pervenire nella tesi di laurea di Fusco sulle Θ -funzioni.

(23) 17 luglio 1929, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

accenna alla presentazione, da lui fatta al "Direttore Marianella", di un ingegnere segnalatogli dalla Del Re.

(24) 20 marzo 1930, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

dà notizie su suoi impegni e accenna a sue riflessioni su "condizioni lineari imposte ad una varietà".

(25) (senza data, ma 25 giugno 1930, senza luogo ma su cartolina postale intestata Senato del Regno, timbro postale Senato del Regno e dunque Roma);

accenna a suoi movimenti e a proprietà di triangoli omologhi.

(26) 5 luglio 1930, (senza luogo ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

accenna ad una sessione di esami e alla serie infinita di triangoli, ai quali accennava in precedenza.

(27) 15 marzo 1932, (senza luogo, ma su carta intestata Senato del Regno e dunque presumibilmente Roma);

accenna a qualche aneddoto e alla possibile riduzione dell'hessiana di una cubica piana.

(28) 17 maggio 1932, (senza luogo, ma su cartolina postale intestata Senato del Regno, timbro postale Senato del Regno e dunque Roma);

invia saluti.

(29) 15 dicembre 1932, (senza luogo, ma su cartolina postale intestata Senato del Regno, timbro postale Senato del Regno e dunque Roma);

annuncia il suo arrivo.

(30) 6 giugno XII (senza anno, ma 1934), (senza luogo, ma timbro postale Napoli);

accenna alle difficoltà incontrate in consiglio di facoltà alla proposta di fusione dei gabinetti e alla preparazione di un compito per gli studenti.

V Corrispondenza epistolare tra Salvatore Di Giacomo e Maria Del Re.

Si tratta di una cartolina postale illustrata inviata da Di Giacomo a Del Re.

(a) Di Giacomo a Del Re.

(1) (senza data, ma timbro postale del 22 agosto 1923), Sant'Agata, Massa Lubrense;

vengono inviati saluti da un rinomato luogo di villeggiatura dell'epoca.

VI Corrispondenza epistolare tra Giandomenico Mattioli e Maria Del Re.

Si tratta di tre lettere inviate da Mattioli a Del Re.

(a) Mattioli a Del Re.

(1) 1 aprile 1942, (senza luogo);

si rallegra per le buone notizie che la Del Re ha ricevuto a proposito di suo fratello e annuncia che sua moglie attende un bimbo.

(2) 1 agosto 1942, (senza luogo);

prende accordi per la nomina dei docenti che dovranno svolgere le esercitazioni per il nuovo anno accademico e per l'arredo del suo studio.

(3) 27 luglio 1943, (senza luogo);

la lettera è scritta durante un allarme aereo due giorni dopo la caduta del Fascismo; vi sono dei commenti ironici sui turbinosi eventi che si vanno succedendo rapidamente; viene anche narrato un episodio relativo al cambiamento repentino delle situazioni: Giulio Andreoli, che aveva avuto ruoli assai significativi durante il regime nella Facoltà di Scienze dell'università di Napoli e nell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche, in una seduta pubblica viene affrontato dalla Bakunin con la frase "non dica buffonate", Carrelli non lo saluta e Andreoli umilmente chiede di esserlo e "s'inginocchia a mani giunte".

VII Corrispondenza epistolare tra Giuseppe Scorza Dragoni e Maria Del Re.

Consiste nella minuta di una unica lettera inviata da Del Re congiuntamente a Cimmino e Scorza Dragoni.

(a) Del Re a Scorza Dragoni.

(1) (Senza data, senza luogo);

accenna scherzosamente a un periodo di tempo che Cimmino e Scorza stanno trascorrendo in un paese di lingua tedesca; ricorda le partite a scacchi giocate con lei e Del Pezzo.

Come segnalato, la lettera è inviata congiuntamente a Cimmino e Scorza Dragoni

VIII Altri corrispondenti.

(a) Gösta Mittag Leffler a Pasquale Del Pezzo.

(1) 8 maggio 1926, Djursholm;

Mittag Leffler segnala a Del Pezzo di aver interessato Birkhoff per una borsa di studio per la Del Re su fondi della fondazione Rockefeller.

4 - L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA PRESSO L'UNIVERSITÀ DI NAPOLI NEGLI ANNI VENTI E TRENTA DEL NOVECENTO

La parte più interessante del fondo è costituita senz'altro dalle raccolte di disegni redatte dagli studenti dei corsi di geometria proiettiva. Queste raccolte saranno descritte nel paragrafo successivo. In questo paragrafo invece desideriamo inquadrare tali raccolte all'interno dell'insegnamento della geometria all'università di Napoli nel periodo durante il quale i disegni furono eseguiti.

Va innanzi tutto precisato che i disegni riguardano i corsi di base e dunque alla discussione di questi ci limiteremo; inoltre poiché essi furono redatti durante quella dozzina di anni che va dai primi anni Venti e ai primi anni Trenta; per meglio contestualizzarli esamineremo le vicende di questi corsi dalla metà degli anni Dieci alla fine degli anni Trenta, all'incirca dunque per un quarto di secolo.

La discussione sarà articolata su tre punti, che riguarderanno rispettivamente gli obblighi didattici degli studenti, i docenti che davano i corsi, le impostazioni dei corsi stessi. Questi argomenti stessi sono discussi fino al 1923 in (Gatto 2000), nel contesto degli insegnamenti delle scienze

matematiche, fisiche, chimiche e naturali, nell'intero Novecento in (Borrelli, Gatto 2002) nel contesto degli insegnamenti tecnico-scientifici, mentre in (Miranda 1977) è delineata l'intera successione dei professori universitari, ordinari, di matematica a Napoli dall'Unità agli anni Settanta del secolo passato.

I Gli obblighi didattici.

I corsi di base di geometria erano in linea di massima tre, denominati Geometria Analitica, la cui denominazione era spesso accompagnata dal termine "con Esercizi", Geometria Proiettiva con Disegno, Geometria Descrittiva con Disegno. I tre corsi erano dati nella facoltà di scienze matematiche fino al 1923, facoltà distinta da quella di scienze fisiche e naturali: va precisato che questo assetto costituiva un'anomalia nell'ordinamento universitario italiano, anomalia sanata dalla riforma Gentile. A partire dunque dal 1923 i corsi vennero dati nella facoltà di scienze matematiche fisiche e naturali nata dalla riunione delle due facoltà preesistenti. I corsi di geometria analitica e di geometria proiettiva si svolgevano al primo anno, quello di geometria descrittiva al secondo. Tali corsi furono dati fino all'anno accademico 1934-35. A partire dall'anno successivo i corsi di proiettiva ed analitica furono sostituiti da un unico insegnamento denominato Geometria Analitica con Elementi di Proiettiva.

Destinatari dei tre corsi furono fino all'anno accademico 1934-35 gli studenti del primo biennio di matematica e, a partire dal 1924, anche quelli della laurea didattica in matematica e fisica allora istituita. Si trattava di un'anomalia dell'università napoletana, in quanto in generale nelle università italiane erano obbligatori solo due corsi di geometria nel primo biennio: quello di geometria descrittiva ed un altro che riassorbiva l'analitica e la proiettiva. A partire dall'anno 1935-36 l'anomalia scomparve e i due corsi di proiettiva ed analitica furono sostituiti dall'unico insegnamento di analitica con elementi di proiettiva. Gli studenti del primo biennio di ingegneria dovettero dare i tre esami fino all'anno accademico 1934-35; da quel momento scomparvero per loro i corsi di geometria descrittiva e di geometria proiettiva come entità distinte e dovettero dare un unico corso denominato Geometria Descrittiva con Elementi di Geometria Proiettiva ed Esercitazioni, che si teneva al secondo anno. Gli studenti di fisica diedero i tre corsi fino al 1924-25; a partire da quell'anno il corso di geometria descrittiva per loro cadde e dal 1935-36 cadde anche il corso di geometria proiettiva.

II I docenti.

Durante il corso dei primi venti anni del Novecento il corpo dei professori ordinari di discipline geometriche della facoltà di scienze matematiche di Napoli fu sostanzialmente stabile. Erano quattro su un totale di otto: Pasquale Del Pezzo, Alfonso Del Re, Domenico Montesano, Nicola Salvatore Dino. Del Re e Salvatore Dino tennero in maniera stabile i corsi rispettivamente di geometria descrittiva e geometria analitica; fino al 1912 Montesano tenne il corso di geometria proiettiva e Del Pezzo quello di geometria superiore, che veniva dato nel secondo biennio per matematica, in quell'anno si scambiarono gli insegnamenti.

Negli anni Dieci Enrico Amaturò e Rubino Nicodemi davano corsi di geometria descrittiva come liberi docenti, mentre nella stessa qualità Federico Amodeo, Enrico Ascione, Generoso Gallucci davano corsi di geometria proiettiva.

Agli insegnamenti erano collegati dei gabinetti nei quali erano inquadrati degli assistenti, che coadiuvavano i docenti nelle loro attività.

Nella seconda metà degli anni Dieci al gabinetto di geometria analitica, diretto da Salvatore Dino, era aggregato come assistente Gaetano Del Pezzo; a quello di proiettiva diretto da Pasquale Del Pezzo erano aggregati Ascione e, a partire dal 1917-18, Maria Del Re, come assistente volontaria; a quello di descrittiva, diretto da Del Re, Rosaria Giordano.

A cavallo della fine degli anni Dieci e gli inizi degli anni Venti il quadro cambia in maniera decisa per la morte dapprima di Salvatore Dino, poi di Del Re. Dopo qualche anno il primo viene sostituito da Gaetano Scorza. Un po' più difficile appare la sostituzione di Del Re: il corso viene dato per incarico prima a Nicodemi, poi ad Amaturò. A partire dall'anno accademico 1924-25 l'insegnamento ha un nuovo titolare, Gustavo Sannia. Questa situazione perdura all'incirca fino al 1930. Il quadro dei liberi docenti rimane più o meno quello degli anni precedenti, mentre tra gli assistenti scompaiono Ascione e Gaetano Del Pezzo che vengono sostituiti da Maria Del Re e da Gianfranco Cimmino.

Intorno al Trenta scompaiono Sannia e il docente di geometria superiore, Montesano. Scompare anche il docente di applicazioni di geometria descrittiva della Facoltà di Ingegneria, Nicodemi. Sannia e Montesano non verranno mai sostituiti: i professori ordinari di geometria, alla facoltà di scienze di Napoli, si riducono a due. Amaturò prima, Ascione poi danno per incarico geometria descrittiva fino al 1935. Rimane invece stabile anche in questo quinquennio il quadro dei liberi docenti e degli assistenti; Amaturò prima e Ascione poi sono direttori incaricati del gabinetto di geometria descrittiva.

Intorno al 1935 per la scuola geometrica napoletana è la catastrofe: Gaetano Scorza si trasferisce all'università di Roma, Pasquale Del Pezzo va in pensione. Non vi è più nessun professore ordinario di geometria nella facoltà di

scienze. Solo nel 1939 la lacuna sarà colmata da Nicolò Spampinato che terrà un corso denominato Geometria Analitica.

Ascione dà anche per incarico nel 1934-35 geometria proiettiva oltre che descrittiva; negli anni successivi sono Gallucci e Cimmino a tenere, per incarico, i due corsi di geometria descrittiva e geometria analitica con elementi di proiettiva. Danno (o almeno presentano il programma) come liberi docenti Amodeo un corso di geometria proiettiva e la Giordano un corso di descrittiva. Il gabinetto di geometria proiettiva scompare; i gabinetti di geometria analitica e di geometria descrittiva si fondono in unico gabinetto diretto per incarico da Gallucci, al quale vengono aggregati come assistenti Cimmino, Maria Del Re, Giordano.

E' cominciata a Napoli l'era dell'analisi che vedrà sempre più riflettere la personalità di Caccioppoli.

III Le impostazioni dei corsi.

Nell'esaminare le impostazioni dei corsi va precisato che saranno utilizzati essenzialmente i testi che i docenti utilizzavano e che per lo più erano scritti da loro stessi. In effetti al momento non è stato possibile reperire né appunti di corsi presi da studenti né registri di lezioni. Si tratta dunque di una ricostruzione parzialmente congetturale in quanto i programmi effettivamente svolti potrebbero essere stati anche notevolmente differenti da quanto esposto nei testi. L'incertezza è talora in parte riducibile grazie al confronto tra le versioni litografate, più aderenti alle lezioni effettivamente date, e le versioni a stampa dei testi, da quelle precedenti. Va comunque segnalato anche che vi è qualche evidenza di un alleggerimento dei contenuti dei corsi avvenuto durante il primo conflitto mondiale, naturalmente proprio a causa di questo. Gli stessi testi pubblicati nel periodo sono molto più snelli, anche a causa delle restrizioni imposte sui consumi di carta.

Certamente il corso più stabile durante il quarto di secolo in esame è proprio quello al quale sono relative le raccolte di disegni presenti nel fondo, cioè il corso di geometria proiettiva: esso è, come osservato, tenuto da Pasquale Del Pezzo fino al suo ritiro dall'insegnamento nel 1934, assistito prima, per qualche anno, da Enrico Ascione e poi da Maria Del Re. Subito dopo il corso scompare.

Il testo di lezioni (Del Pezzo 1913, 1920) di cui si serve, da lui stesso scritto, è anch'esso sostanzialmente stabile negli anni. La cosa che immediatamente colpisce a sfogliarlo, trattandosi di un testo di un corso di geometria accompagnato da corpose esercitazioni grafiche testimoniate dalle raccolte di disegni, è l'assoluta mancanza di figure. In effetti l'impostazione è completamente astratta: si apre con dei preliminari sulle sostituzioni, al quale fa seguito un primo capitolo sui postulati della geometria proiettiva. Del Pezzo

precisa quasi subito (Del Pezzo 1913, 1920; 1913, capitolo primo, paragrafo 1 numero 1) in puro stile hilbertiano:

“Sono *elementi* della geometria il *punto*, la *retta*, il *piano*.

Oss. Gli elementi si nominano, non si definiscono. Se ai detti nomi si voglia connettere un'immagine, sarà comodo di associare loro quella consueta e tradizionale, raffigurandosi per altro la retta e il piano come illimitati. Ma nulla vieta, anzi sarà spesso utile, di associare alle parole punto, retta, piano altre immagini, diverse dalle consuete, p.e. di assumere per punto un cerchio, un corpo solido, un istante di tempo, una temperatura etc., enti già definiti mediante precedenti teorie, ovvero forniti dall'esperienza.”

Questo approccio sarà effettivamente utilizzato: nel capitolo terzo, ad esempio, nel definire lo spazio complesso, non verrà fatto nessuno sforzo, a differenza di quello che spesso accadeva, per darne un'immagine. Del Pezzo in effetti scrive semplicemente (Del Pezzo 1913, 1920; 1913 capitolo terzo, numero 1):

“Si chiamerà *punto complesso* la terna di rapporti indipendenti fra quattro quantità complesse arbitrarie x_0, x_1, x_2, x_3 . L'insieme di tutti i punti è l'insieme di siffatte terne e si chiamerà spazio punteggiato complesso.”

Il volume si articolerà allora su quattro capitoli; il primo dedicato alla geometria proiettiva in generale, il secondo alla geometria proiettiva delle forme algebriche, il terzo allo spazio complesso, il quarto alle coniche.

I contenuti del corso di geometria analitica, che non prevedeva esercitazioni grafiche, subiscono invece una svolta sostanziale proprio all'inizio degli anni Venti con l'arrivo di Gaetano Scorza.

Salvatore Dino, nel lungo periodo di tempo durante il quale aveva dato il corso, si era tenuto fedele all'ispirazione originaria data da Cremona e che aveva segnato una svolta nell'insegnamento della materia.

Cremona, in effetti, verso la metà degli anni Ottanta del secolo decimonono aveva cercato di mitigare quell'aridità che a lui sembrava essere presente nei corsi di analitica con la più vasta interpretazione geometrica dei concetti algebrici che si poteva ottenere attraverso l'uso in qualche misura intuitivo di quei concetti proiettivi, che si erano impetuosamente affermati nel corso dell'Ottocento. Una schiera di geometri aveva seguito la sua impostazione (si vedano ad esempio (Castelnuovo 1903), (Del Re 1900).

Così il testo di Salvatore Dino (Salvatore Dino 1914) si apre con l'introduzione e lo studio dei concetti di rapporto enarmonico, di forma fondamentale di prima specie, di gruppo armonico, di coordinate omogenee e baricentriche.

Scorza invece nel suo testo (Scorza 1923), (Scorza 1925) aveva nuovamente distinto in maniera piuttosto decisa la parte di geometria analitica e la parte di geometria proiettiva, facendo precedere quest'ultima da quella.

La trattazione della prima parte era condotta con notevole semplicità rinunciando all'introduzione dei punti complessi e punti all'infinito. Introduceva poi nozioni algebriche più sofisticate di quelle generalmente utilizzate, discutendo le forme quadratiche, la loro riduzione a forma canonica attraverso sostituzioni ortogonali, i loro invarianti simultanei ed ortogonali; utilizzava questi concetti per la classificazione e lo studio delle varietà quadratiche. La geometria proiettiva veniva allora introdotta, nella seconda parte, subito in maniera assiomatica. Poteva così affermare (Scorza 1925, pg. 439):

“Alle parole *punto*, *retta*, *piano* e *spazio* sono stati fin qui attribuiti gli stessi significati che nella geometria elementare; in questa seconda Parte del volume ciascuna di esse sarà adoperata invece in più sensi differenti che saranno a mano a mano definiti.”

L'impostazione data da Del Re all'insegnamento di geometria descrittiva era abbastanza originale. Egli non vedeva nella disciplina solo un insieme di tecniche, sia pure razionalmente organizzate, per rendere le figure spaziali sul piano, ma piuttosto lo studio delle trasformazioni di figure geometriche in altre con la conservazione di determinate proprietà di natura non metrica, per l'appunto descrittive. Non veniva mai perso di vista l'aspetto intuitivo degli oggetti esaminati. Così ad esempio si dava un'interpretazione dei punti complessi attraverso opportune involuzioni. Va anche segnalato che al corso di Del Re non solo si accompagnavano esercitazioni grafiche date dalla Giordano, ma veniva anche richiesta la costruzioni di modelli degli oggetti geometrici discussi. Alcuni di questi elaborati sono ancora custoditi presso il dipartimento di matematica dell'università di Napoli “Federico II” (Carbone *et al.* 1996).

Questo approccio e le sue conseguenze erano stati esposti in un volumetto a stampa (Del Re 1906), mentre la rimanente parte delle sue lezioni erano rimasta soltanto litografata (Del Re 1905, 1920).

Con la scomparsa di Del Re questa impostazione fu profondamente modificata. Nicodemi (Nicodemi 1880), Amato (Amato 1905a), Sannia (Sannia 1926, 1930) legarono il corso maggiormente alle esigenze professionali degli studenti di ingegneria e tesero a collegarlo con quello successivo (per gli aspiranti ingegneri) di applicazioni della geometria descrittiva. Non a caso Nicodemi era proprio professore ordinario di questa disciplina alla scuola politecnica. Sannia scriveva, ad esempio, in apertura del suo testo di lezioni (Sannia 1926, 1930):

“La Geometria descrittiva ha comune con l'arte del disegno in genere lo scopo di rappresentare ogni oggetto a tre dimensioni mediante un disegno su di un piano (materializzato dal foglio di disegno).”

Concludeva poi dichiarando che avrebbe ommesso di discutere il metodo delle proiezioni centrali, che era stato molto curato da Del Re, e avrebbe dato solo un cenno al metodo delle proiezioni assonometriche, anch'esso largamente utilizzato dal suo predecessore: riconosceva i “pregi”, di questi due metodi, ma sosteneva fossero pagati “con una maggiore complicazione nella risoluzione grafica dei problemi”; e forse non era assente in queste parole una nota quanto meno di distinzione rispetto a quanto proposto da Del Re.

Cade così ad esempio l'interesse per la rappresentazione dei punti complessi.

In conclusione l'insieme dei tre corsi, sia pure nella loro variabilità cronologica, oltre a fornire una notevole quantità di nozioni e competenze tecniche, sembrava organizzato anche per stimolare nello studente sia le attitudini logiche sia l'intuizione spaziale.

5 - SECONDA SEZIONE: RACCOLTE DI DISEGNI

Si tratta di cinque raccolte che saranno designate nel seguito come album, le due più antiche risalgono all'anno accademico 1922-23, la più recente all'anno 1932-33. Sono state composte tutte in relazione al corso di geometria proiettiva con disegno. Le singole tavole, che costituiscono gli album, controllate, man mano che venivano eseguite durante il corso dell'anno accademico, dal docente, Del Pezzo o dai suoi assistenti nel gabinetto di geometria proiettiva, Ascione e Del Re, venivano anche quasi sempre controfirmate. Molto probabilmente le tavole sono state raccolte in album alla fine del corso e gli album sono stati poi donati ai docenti. Testimonianze orali, riferentisi alle modalità di svolgimento dei corsi agli inizi degli anni Cinquanta del secolo passato accennano invece ad una consegna e ad una verifica delle tavole effettuata alla fine dei corsi. Rimaneva l'uso della controfirma per impedire il riutilizzo delle tavole, che talora venivano anche punzonate.

Va notato esplicitamente che sia al variare degli anni sia al variare dello studente le tavole da eseguire mutavano, pur rimanendo per lo più ispirate agli esercizi proposti nel testo di Del Pezzo (Del Pezzo 1913, 1920). E' molto probabile peraltro, come sembra evincersi da alcuni titoli, che per alcune di esse venisse lasciata una certa libertà all'esecutore.

I disegni sono tutti di natura bidimensionale, ambientati dunque nel piano, in quanto quelli di natura tridimensionale, di natura spaziale venivano eseguiti durante il corso di geometria descrittiva. Un'idea della tipologia di questi ultimi

disegni può essere ricavata soprattutto dai testi pubblicati dalla Giordano (Giordano 1942), che fu durante quegli anni, come osservato, assistente nel gabinetto di geometria descrittiva..

Le costruzioni geometriche date riguardano per lo più contatti circolari, forme di ennagoni ed ennilateri, quaterne armoniche, omologie, omologie affini, collinearità, simmetrie, scale armoniche, proiettività e forme proiettive, involuzioni, costruzioni di coniche mediante i teoremi di Pascal, Brianchon, Maclaurin, Poncelet, Desargues, Sturm, polarità rispetto alle coniche, coniche passanti per punti complessi coniugati. Vi è dunque una forte prevalenza di costruzioni legate alle coniche e anche i vari tipi di trasformazioni sono esemplificati sulle coniche. Queste considerazioni sono confermate anche dall'esame dei testi pubblicati, anche se anni dopo, dalla stessa Del Re (Del Re M. 1940).

L'elenco degli album è il seguente:

- album dello studente Oscar Massari (anno accademico 1922-23);
- album dello studente Salvatore Morello (anno accademico 1922-1923);
- album dello studente Gianfranco Cimmino (anno accademico 1923-1924);
- album dello studente Plinio Bonessio (anno accademico 1930-1931);
- album dello studente Alfredo Latour (anno accademico 1932-33).

L'album che presenta le costruzioni geometriche più complesse è certamente quello di Cimmino (soprattutto nelle ultime tavole) e il suo autore ebbe una notevole carriera accademica, inizialmente proprio nel settore geometrico, poi in quello dell'analisi matematica; invece l'album di Latour, peraltro anch'esso di notevole complessità, spicca per la sua raffinatezza.

Viene data qui di seguito la descrizione analitica dei singoli album.

I Album Massari (anno accademico 1922-1923).

L'album presenta una rilegatura cartonata con dorso in tela. Sulla copertina non v'è titolo. Nel frontespizio, molto ricco e policromo, è disegnato, in formato ridotto, un altro frontespizio, quello del testo di Del Pezzo, che riporta la frase *Principi di Geometria proiettiva. Lezioni dettate dal professore Pasquale Del Pezzo nell'anno scolastico 1922-1923*; sono riportate in prospettiva le pagine 22 e 23 di questo testo; figurano rappresentati un ragno e una ragnatela con degli insetti; compaiono una riga ed un compasso. Appare la scritta Geometria Proiettiva; tra la prima parola e la seconda sono inseriti i nomi dei fondatori della disciplina, Sturm, Poncelet, Pascal, Desargues, Brianchon a caratteri maiuscoli. Compare anche la scritta *Enrico Ascione diresse, Oscar Massari fece*.

Vi sono tavole con una, due, tre, quattro e sei figure. Esse, tutte su fondo bianco, possono essere disegnate ad un colore (nero), in due colori (nero e

rosso, nero e marrone), a tre colori (nero, rosso, giallo). Vi sono linee tratteggiate ed intere di differenti spessori.

Le tavole hanno dimensioni di 64 centimetri per 50 e presentano una squadratura di 55 centimetri per 46. Le tavole sono firmate da Oscar Massari e controfirmate in parte da Enrico Ascione e in parte da Pasquale Del Pezzo.

L'album è dotato di un indice, nel quale viene descritto il contenuto di ogni tavola. Esso viene riportato di seguito, utilizzando l'abbreviazione T per tavola e F per figura; il numero di tavola è dato in cifre romane, il numero di figura in numeri arabi, come nell'originale.

T I. Contatti circolari.

Dati due punti ed una retta costruire le due circonferenze passanti per i punti dati e tangenti alla retta: F 1.

Date due rette ed un punto costruire le due circonferenze tangenti alle rette date e passanti per il punto dato: F 2.

T II. Contatti circolari.

Dati due punti ed un cerchio, costruire le due circonferenze passanti per i punti dati e tangenti al cerchio: F 3.

Dato un triangolo costruire le quattro circonferenze tangenti ai lati esternamente ed internamente ad esso: F 4.

T III. Contatti circolari.

Dato un punto, una retta ed un cerchio costruire le quattro circonferenze passanti per il punto, tangenti alla retta e tangenti al cerchio esternamente ed internamente: F 5.

T IV. Contatti circolari.

Dati due cerchi ed un punto costruire le quattro circonferenze passanti per il punto e tangenti esternamente ed internamente ai due cerchi dati: F 6.

T V. Contatti circolari.

Date due rette ed una circonferenza costruire le quattro circonferenze tangenti esternamente ed internamente al cerchio dato tangenti alla retta: F 7

T VI. Contatti circolari.

Dati tre cerchi, costruire le 8 circonferenze tangenti esternamente ed internamente ad esso: F 8.

T VII. Quadrangoli piani completi: F 9, F 10, F 11, F 11, F 12.

T VIII. Quadrilateri piani completi: F 13, F 14, F 15, F 16.

T IX. Con i vertici di un quadrangolo piano completo si possono formare tre quadrangoli completi: F 17, F 18, F 19, F 20, F 21, F 22.

T X Triangoli prospettici: F 23.

Corrispondenza armonica tra quadrangoli e quadrilateri. F 24, F 25.

T XI. Corrispondenza armonica, omologia tra le rette: F 26, F 27, F 28, F 29.

T XII Trasformare un quadrilatero in parallelogramma, in rettangolo e quadrato: F 30, F 31, F 32.

Trasformare un triangolo in equiangolo: F 33.

T XIII. Trasformazione omologica del cerchio in ellisse: F 34.

T XIV. Trasformazione omologica del cerchio in parabola: F 35.

T XV. Trasformazione omologica del cerchio in iperbole: F 36.

T XVI. Trasformazione omologica del cerchio nelle tre coniche: F 37.

T XVII. Omologia armonica: esagono e decagono intrecciato: F38, F39.

T XVIII. Trasformazione omologica col centro all'infinito: F 40, F41.

T XIX. Trasformazione omologica di un pavimento: F 42.

T XX. Trasformazione omologica di un quadro: F 43.

T XXI. Affinità: F 44.

T XXII. Omologia: dati quattro punti di una conica e la tangente in uno di essi costruirla: F 45.

T XXIII. Coniche osculatrici: F 46, F 47.

T XXIV. Conica sovraosculatrice: F 48.

T XXV. Costruzioni di quarti armonici: F 49, F 50, F 51, F 52.

T XXVI. Esagono di Pascal: F 53, F 54, F55, F 56, F57, F58.

T XXVII. Seilatero di Brianchon: F 59, F 60, F 61, F62, F 63, F64.

T XXVIII. Costruzione iperbole per tangenti: F 65;

per fasci proiettivi: F 66.

T XXIX. Date due coppie di punti descrivere l'involuzione e ricerca dei punti centrali e relativi duali: F 67, F 68, F 69. F 70, F71, F72.

T XXX. Involuzione armonica: F 73.

T XXXI. Teorema di Maclaurin: dati cinque punti costruire la conica: F 74.

T XXXII. Teorema di Pascal: dati cinque punti costruire la conica: F 75.

T XXXIII. Applicazioni del teorema di Pascal: dati quattro punti e una tangente costruire l'ellisse: F 76;

dati cinque punti costruire l'iperbole: F 77.

T XXXIV. Teorema di Brianchon: date cinque tangenti costruire la conica: F78.

T XXXV. Costruzione dell'ellisse per fasci proiettivi: F 79;

per involucri mediante punteggiate: F 80.

T XXXVI. Raggi doppi e punti doppi: F 81, F 82.

Dati cinque punti di una conica ed una retta, trovare i punti di incontro della retta con la conica e duale: F 83, F84.

T XXXVII. Asse di prospettiva: F 85, F 86.

T XXXVIII. Trovare i punti d'intersezione della conica con una retta: F 87.

T XXXIX. Fascio di coniche passanti per quattro punti (coniche costruite col teorema di Pascal e fasci proiettivi) e tangenti ad una retta: F 88.

T XL. Proiettività fra punteggiate di secondo ordine: F 89;

dati due fasci di raggi proiettivi costruire i raggi corrispondenti fra loro paralleli: F 90.

T XLI. In ogni fascio di coniche vi sono due parabole: F 91.

T XLII. Date due involuzioni (ellittiche) di punti reciproci, costruire di una retta il polo e trovare il centro della polarità: F 92;

date due involuzioni di punti reciproci di cui una iperbolica e l'altra ellittica, costruire la conica passante per i punti doppi dell'involuzione: F 93.

T XLIII. Condurre da un punto P le tangenti ad una conica: F 94, F 95, F 96.

T XLIV. Problema di falsa posizione: F 97.

T XLV. Problema di falsa posizione: F 98, F 99.

T XLVI. Dato il centro O di una conica, un punto a e l'involuzione ellittica intorno ad O costruire la conica: F 100;

date cinque tangenti ad una conica, costruire il centro, le coppie di diametri coniugati ed un punto di contatto: F 101.

T XLVII. Schiera di coniche passanti per un punto e tangenti a quattro rette: F 102;

triangolo autoreciproco e costruzione della polare: F 103.

T XLVIII. Data la conica per quattro punti ed un punto fuori di essa, costruire la polare: F 104;

data conica per cinque punti, trovare la polare di P senza costruire la conica e viceversa: F 105, F 106.

T XLIX. Dati tre punti reali e due complessi coniugati, costruire la conica passante per essi: F 107.

T L. Dato un punto reale A ed una coppia di complessi coniugati, costruire la circonferenza passante per essi: F 108.

T LI. Schiera di coniche passanti per tre punti e tangenti a due rette (quattro ellissi): F 109.

T LII. Schiera di coniche passanti per tre punti e tangenti a due rette (tre ellissi ed una iperbole): F 110.

II Album Morello (anno accademico 1922-1923).

L'album è rilegato in tela. La copertina porta incisa in caratteri d'oro la scrittura *Prof. Del Pezzo Disegni di Geometria Proiettiva*.

Vi sono tavole con una, due, nove figure. Esse sono tutte su fondo bianco e possono essere disegnate in un colore (nero), due colori (nero e rosso, nero e verde, rosso e verde) e in tre colori (nero, rosso e verde). Vi sono linee tratteggiate ed intere con differenti spessori.

Le tavole hanno dimensioni di 44 centimetri per 33,5 e presentano una squadratura di 42 centimetri per 31. Esse sono firmate da Salvatore Morello e controfirmate in parte da Maria Del Re e in parte da Pasquale Del Pezzo.

L'album è privo di indice ma le singole tavole presentano per lo più dei titoli. Esse saranno qui numerate nell'ordine progressivo nel quale appaiono nell'album con numeri romani preceduti dalla sigla T e in caso di assenza di titolo, la cosa sarà esplicitamente notata.

Qualche volta, in presenza di più figure nella stessa tavola, la tavola può avere più titoli che descrivono singole figure o gruppi di figure; verranno dati allora i vari titoli e verrà indicato il numero di figure corrispondente se diverso da uno. Talora, invece, possono essere presenti nella stessa tavola più figure senza che siano descritte singolarmente o a gruppi; in tal caso verrà qui indicato solo il numero complessivo di figure presenti.

T I. Costruire la conica date 4 tangenti ed un punto di contatto.

T II. Dati tre punti di una conica e le tangenti in due di essi, costruire la conica col teorema di Pascal.

T III. (Senza titolo), (nove figure).

T IV. Dati due assintoti e un punto, costruire l'iperbole col teorema di Pascal.

T V. (Senza titolo).

T VI. (Senza titolo).

T VII. (Senza titolo).

T IX. Dati tre punti e due rette, costruire la conica col teorema di Maclaurin.

T X. Dati quattro punti e la tangente in uno di essi costruire la conica.

T XI. Dati gli asintoti e tre punti, costruire l'iperbole.

T XII. Dati cinque punti, individuare la natura della conica.

T XIII. Costruire l'iperbole equilatera individuata da due fasci inversamente eguali.

T XIV. Date quattro tangenti, costruire la parabola col teorema di Brianchon (due figure).

T XV. Date le direzioni degli assintoti e tre punti, costruire metricamente l'iperbole.

T XVI. (Senza titolo).

T XVII. (Senza titolo).

T XVIII. (Senza titolo), (due figure).

T XIX. Data una conica, trovare gli assi. - Polarità.

Data una conica trovare gli assi.

T XX. Dati gli asintoti di una iperbole e una tangente, costruirla col teorema di Brianchon.

Costruire per inviluppo la parabola individuata da due tangenti con i loro contatti.-Brianchon.

T XXI. Date cinque tangenti, costruire la conica col teorema di Sturm.

T XXII. Dati cinque punti, costruire la conica col teorema di Desargues.

T XXIII. Trasformazioni di quadrangoli (quattro figure).

T XXIV. Date tre tangenti e i contatti in due di esse, costruire la conica luogo ed involuppo.

T XXV. Date cinque tangenti trovare il contatto su una di esse col teorema di Sturm.

T XXVI. Date quattro tangenti ed il contatto su una di esse, trovare il contatto sopra un'altra tangente.

Costruire la parabola individuata da quattro tangenti. Sturm.

T XXVII. Dati gli asintoti di una iperbole ed una tangente, costruire la conica involuppo col teorema di Sturm.

Date tre tangenti di una parabola e il contatto su una di esse, trovare la direzione dell'asse.

T XXVIII. Costruire una conica individuata da tre punti non in linea retta e dalla involuzione di punti reciproci che essa definisce su una retta r del piano.

T XXIX. Costruire una conica ϕ che passi per un punto M e rispetto alla quale siano polo e polare un punto A ed una retta nonché un punto B ed una retta b .

Costruire una conica che passi per tre punti $A B C$ e rispetto alla quale siano polo e polare un punto ed una retta dati.

T XXX. Costruire le coniche passanti per quattro punti e tangenti ad una retta data.

T XXXI. Data la parabola trovare l'asse.

Costruire una omografia tra sistemi piani sovrapposti individuata da due proiettività ciascuna delle quali intercede tra due forme omonime di prima specie $\sigma \sigma'$.

T XXXII. Dato un triangolo reciproco, un vertice A del quadrangolo e un punto L , trovare la conica.

Dato un trilatero reciproco, una retta a e una tangente distinta, costruire la conica.

T XXXIII. Costruire una ϕ che passi per due punti dati e tocchi una retta data e rispetto alla quale siano polo e polare un punto e una retta dati.

T XXXVIII. Trasformare omologicamente una conica in un circolo adoperando la polarità.

T XXXIX. Dati tre punti reali e due complessi coniugati, costruire la conica.

T XL. Costruire l'iperbole equilatera passante per i punti $A B C D$.

III Album Cimmino (anno accademico 1923-1924).

L'album è rilegato in tela. Sulla copertina porta incisa la scritta in caratteri d'oro *Disegni di Geometria Proiettiva*. Sul frontespizio è riportata nuovamente

la dicitura *Disegni di Geometria Proiettiva*, con il nome dell'autore Gianfranco Cimmino e l'indicazione dell'anno scolastico 1923-1924.

Le tavole sono tutte su fondo bianco e possono contenere una, due, tre, quattro, sei figure. Sono tutte disegnate in nero. Le linee possono essere intere o tratteggiate e di differente spessore.

Le tavole hanno una dimensione di 47 centimetri per 33 e presentano una squadratura di 38,5 centimetri per 26. Esse sono firmate da Gianfranco Cimmino e controfirmate da Maria Del Re.

L'album ha un indice suddiviso per tavole, numerate con numeri romani progressivi e figure contenute nella singola tavola, numerate con numeri arabi progressivi indipendentemente dalla tavola di appartenenza. Ciascuna tavola e ciascuna figura hanno un titolo. Il numero di tavola nell'elenco che segue è preceduto dalla sigla T, il numero di figura dalla sigla F.

T I. Quadrangoli piani completi: F 1, F 2, F 3, F 4.

T II. Triangoli prospettivi ed omologici: F 5;

trilateri omologici e prospettivi: F 6.

T III. I tre assi di omologia di tre triangoli, a due a due omologici, concorrono in un punto: F 7.

T IV. Dato il triangolo diagonale e un vertice di un quadrangolo piano completo, costruirlo: F 8;

dato il triangolo diagonale e un lato di un quadrilatero piano completo costruirlo: F 9.

T V. Dato il centro, l'asse ed una coppia di punti corrispondenti in una omologia costruirla: F 10;

dato l'asse, il centro e una coppia di rette corrispondenti in una omologia, costruirla: F 11;

dato il centro, l'asse e una coppia dei punti corrispondenti in una omologia, costruirne le rette limiti: F 12;

dato l'asse, il centro e una coppia di rette corrispondenti in una omologia costruirne le rette limiti: F 13;

costruire due rette tali che le loro corrispondenti in una data omologia siano ortogonali: F 14;

costruire due retti tali, che le loro corrispondenti in una data omologia siano paralleli: F 15.

T VI. Dato un quadrangolo semplice costruire una omologia che la trasformi in parallelogramma: F 16;

dato un quadrangolo semplice costruire una omologia che la trasformi in rettangolo: F 17.

T VII. Dato un quadrangolo semplice costruire una omologia che la trasformi in losanga: F 18;

dato un quadrangolo semplice costruire una omologia che la trasformi in quadrato: F 19;

dato un triangolo scaleno costruire un'omologia che lo trasformi in equiangolo: F 20.

T VIII. Ellisse, trasformata omologica del cerchio: F 21.

T IX. Parabola, trasformata omologica del cerchio: F 22.

T X. Iperbole, trasformato omologico del cerchio: F 23.

T XI. Dati quattro punti di una conica e la tangente di uno di esse costruire la conica: F 24;

date quattro tangenti a una conica e il punto di contatto su una di esse, costruire la conica: F 25

T XII. Costruire la conica oscuratrice a un cerchio in un dato punto e passante per altri due punti dati: F 26;

costruire la conica oscuratrice a un cerchio in un dato punto e tangente a due rette date: F 27.

T XIII. Costruire le due coniche oscuratrici a un cerchio in un dato punto, tangente ad una retta e passante per un punto dato: F 28.

T XIV. Trasformazione omotetica. F 29.

T XV. Trasformazione affine: F 30.

T XVI. Scala armonica: F 31.

T XVII. Dato un punto unito e due coppie di punti corrispondenti su due punteggiate proiettive sovrapposte, costruire l'altro punto unito e la proiettività: F 32;

dato un raggio unito e due coppie di raggi corrispondenti in due fasci di raggi proiettivi sovrapposti, costruire l'altro raggio unito e la proiettività: F 33;

dato l'unico punto unito e una coppia di punti corrispondenti in una proiettività parabolica tra punteggiate sovrapposte, costruire la proiettività: F 34;

dato l'unico raggio unito e una coppia di raggi corrispondenti in una proiettività parabolica tra fasci di raggi sovrapposti, costruire la proiettività: F 35.

T XVIII. Conica luogo, intersezione di due fasci di raggi proiettivi: F 36;

conica involuppo, congiungente di due punteggiate proiettive: F 37.

T XIX. Cerchio, intersezione di due fasci di raggi direttamente uguali: F 38;

iperbole equilatera, intersezione di due fasci di raggi inversamente uguali: F 39.

T XX. Conica luogo, intersezione di due fasci di raggi proiettivi, uno col centro al finito e l'altro col centro all'infinito: F 40;

conica involuppo congiungente di due punteggiate proiettive, una col sostegno al finito e l'altra col sostegno all'infinito: F 41.

T XXI. Iperbole luogo, intersezione di due fasci di raggi proiettivi, con entrambi i centri all'infinito: F 42.

T XXII Parabola inviluppo, congiungente due punteggiate simili: F 43.

T XXIII. Dati cinque punti di una conica, costruirla, applicando il teorema di Pascal: F 44;

date cinque tangenti di una conica costruirla, applicando il teorema di Brianchon: F 45.

T XXIV. Pentagono semplice inscritto in una conica: F 46;

cinquilatero semplice circoscritto ad una conica: F 47.

T XXV. Quadrangolo semplice inscritto in una conica: F 48;

quadrilatero semplice circoscritto ad una conica: F 49;

in un quadrangolo semplice inscritto in una conica le coppie di lati opposti e le coppie di tangenti nei vertici opposti si segano in punti per diritto: F 50;

in un quadrilatero semplice circoscritto ad una conica, le coppie di vertici opposti e le coppie di punti di contatto dei lati opposti sono congiunti da rette concorrenti in un punto: F 51.

T XXVI. Dati due triangoli omologici le congiungenti i vertici non corrispondenti inviluppano una conica e le intersezione dei lati non corrispondenti giacciono sopra un'altra conica: F 52.

T XXVII. Congiungere il punto di incontro di due rette date con un altro punto dato, quando le due rette non si incontrino nel foglio di disegno: F 53;

segare con una data retta la congiungente di due punti dati, senza costruire tale congiungente: F 54;

un triangolo circoscritto ad una conica e il triangolo dei punti di contatto sono omologici; il centro e l'asse sono polo e polare rispetto alla conica: F 55.

T XXVIII. Dati quattro punti di una conica e la tangente in uno di essi, costruire la conica, applicando il teorema di Pascal: F 56;

date quattro tangenti ad una conica il punto di contatto su una di esse, costruire la conica, applicando il teorema di Brianchon: F 57.

T XXIX. Dati tre punti di una parabola e la direzione dell'asse, costruire la parabola, applicando il teorema di Pascal: F 58;

date tre tangenti di una parabola e la direzione dell'asse, costruire la parabola applicando il teorema di Pascal: F 58;

date tre tangenti di una parabola e la direzione dell'asse, costruire la parabola, applicando il teorema di Brianchon: F 59.

T XXX. Dati gli assintoti e un punto di un'iperbole, costruirla, applicando il teorema dei fasci dei raggi proiettivi: F 60;

dati gli assintoti e una tangente di un'iperbole costruirla, applicando il teorema delle punteggiate proiettive: F 61;

dati gli assintoti e un punto di un'iperbole costruirla, applicando il teorema di Pascal: F 62;

dati gli asintoti e una tangente di un'iperbole, costruirla, applicando il teorema di Brianchon: F 63.

T XXXI. Costruire la conica luogo applicando il teorema di Maclaurin: F 64;

Costruire la conica involuppo, applicando il teorema di Poncelet: F 65.

T XXXII. Caso particolare del teorema di Maclaurin: F 66;

Caso particolare del teorema di Poncelet: F 67.

T XXXIII. Teorema di Desargues: F 68;

teorema di Sturm: F 69;

corollario del teorema di Desargues: F 70;

teorema della trasversale: F 71.

T XXXIV. Proiettività tra punteggiate di secondo ordine sovrapposte: F 72;

proiettività tra fasci di raggi di seconda classe sovrapposti: F 73;

involutione tra punteggiate di secondo ordine sovrapposte: F 74;

involutione tra fasci di raggi di seconda classe sovrapposti: F 75.

T XXXV. Dati cinque punti di una conica costruire, senza disegnare la conica, i punti di contatto di questa con una data retta: F 76;

date cinque tangenti di una conica costruire, senza disegnare la conica, le tangenti condotte a questa da un dato punto: F 77.

T XXXVI Costruire raggi uniti e la coppia ortogonale di un fascio di raggi in involuzione: F 78;

dato un angolo acuto costruire i due raggi corrispondenti in una data involuzione, che siano lati di un angolo di quella ampiezza: F 79.

T XXXVII. Costruire le due coniche passanti per quattro punti e tangenti ad una data retta: F 80;

costruire le due coniche tangenti a quattro rette dati passanti per un dato punto: F 81.

T XXXVIII. Costruire le due parabole passanti per quattro punti dati: F 82;

caso in cui il problema non ha soluzioni reali: F 83;

caso in cui le due parabole siano degeneri: F 84.

T XXXIX. Costruire le quattro coniche passanti per tre punti dati e tangenti a due date rette: F 85.

T XL. Costruire la conica passante per cinque punti dati, di cui tre reali e due complessi coniugati (prima costruzione): F 86.

T XLI. Costruire le quattro coniche tangenti a tre rette e passanti per due punti reali assegnati: F 87.

T XLII. Costruire le quattro coniche tangenti a tre rette e passanti per due punti complessi coniugati assegnati (prima costruzione): F 88.

T XLIII. Costruire le quattro coniche tangenti a tre rette passanti per due punti complessi coniugati assegnati (seconda costruzione): F 89.

T XLIV. Date l'altezza, la bisettrice e la mediana di un triangolo uscenti da un suo vertice, costruire esso triangolo: F 90;

caso in cui il triangolo abbia due vertici complessi coniugati: F 91;

costruire il cerchio passante per un punto reale e due complessi coniugati assegnati: F 92.

T XLV. Costruire la conica, passante per cinque punti dati, di cui uno reale e quattro complessi, in coppie di coniugati (prima costruzione): F 93.

T XLVI. Rappresentazione grafica sul piano di Gauss degli elementi successivamente corrispondenti in una proiettività lossodromica: F 94.

T XLVII. Costruire la conica, dati polo, polare e tre punti: F 95;

costruire la conica, dati polo, polare e tre tangenti: F 96.

T XLVIII. Costruire la conica passante per cinque punti dati di cui tre reali e due complessi coniugati (seconda costruzione): F 97.

T XLIX. Costruire un'omologia, che trasformi in cerchio una data conica: F 98.

T L. Costruire il triangolo unito in una omografia, date le tre proiettività intorno a tre punti successivamente corrispondenti: F 99.

T LI. Costruire l'omografia dato il triangolo unito e una coppia di punti corrispondenti: F 100;

costruire la collinearità dato il triangolo unito e una coppia di rette corrispondenti: F 101;

costruire la collinearità aderente a una omografia, in cui sono date quattro coppie di punti corrispondenti: F 102;

costruire la omografia aderente ad una collinearità in cui sono date quattro coppie di rette corrispondenti: F 103;

T LII. Conica, trasformata omografica del cerchio: F 104.

T LIII. Costruire un quadrangolo semplice, coi vertici giacenti su quattro rette date e i lati passanti per quattro punti dati: F 105.

T LIV. Inscrivere in una data conica un triangolo coi tre lati passanti per tre punti dati: F 106;

circoscrivere ad una conica un triangolo con i vertici giacenti su tre rette date: F 107.

T LV. Dato polo, polare, due punti e una tangente costruire le due coniche: F 108;

dato polo, polare, due tangenti e un punto, costruire le due coniche: F 109.

T LVI. Costruire le quattro iperboli che abbiano gli assintoti paralleli a due date direzioni che siano tangenti a tre rette date: F 110.

T LVII. Dati cinque punti di una conica, costruire, senza disegnare la conica, la polare di un punto dato: F 111;

dati cinque punti di una conica, costruire, senza disegnare una conica il polo di una retta data: F 112.

T LVIII. Date cinque tangenti ad una conica, costruire, senza disegnare la conica, la polare di un punto dato: F 113;

date cinque tangenti ad una conica, costruire, senza disegnare la conica il polo di una retta data: F 114.

T LIX. Dati cinque punti di una ellisse costruire, senza disegnare la conica, il centro, l'involuzione di diametri reciproci, gli assi: F 115;

dati cinque punti di un'iperbole costruirne, senza disegnarne la conica, il centro, l'involuzione di diametri reciproci, gli assi, gli asintoti: F 116.

T LX. Costruire la conica, che passi per tre dati punti reali e che divida armonicamente una data coppia di punti complessi coniugati: F 117;

costruire la conica che passi per un dato punto reale e che divida armonicamente due date coppie di punti complessi coniugati: F 118.

T LXI. Date su due rette distinte due involuzioni, costruire la polarità, in cui le due rette sono reciproche, le involuzioni sono di punti reciproci; e costruirne la conica unita, se è reale: F 119;

date intorno a due punti distinti due involuzioni, costruire la polarità, in cui i due punti sono reciproci, le involuzioni sono dirette reciproche; e costruirne la conica unita se è reale: F 120.

T LXII. Costruire la conica passante per quattro punti complessi in coppie di coniugati e per un altro punto reale, assegnati: F 121.

T LXIII. Costruire le quattro coniche tangenti a due date rette complesse coniugate e passanti per tre punti reali assegnati: F 122.

T LXIV. Costruire le quattro coniche aventi un dato fuoco e passanti per tre punti dati (prima costruzione): F 123.

T LXV. Costruire le quattro coniche aventi un dato fuoco passanti per tre punti dati (seconda costruzione): F 124.

T LXVI. Costruire l'asse di sintosi opposto a uno dato, quando, dei quattro punti base del fascio due siano reali e due complessi coniugati: F 125;

costruire l'asse di sintosi opposto a uno dato, quando i quattro punti base del fascio siano complessi, in coppie di coniugati: F 126;

date due involuzioni su due rette distinte trovare i due punti sulla polare del loro punto comune dai quali un'involuzione è proiettata nell'altro: F 127.

T LXVII. Fascio schiera delle coniche di tangenti: F 128.

T LXVIII. Fascio schiera delle coniche sovraosculatrici: F 129.

T LXIX. Costruire la conica sovraosculatrice in un dato punto a un dato cerchio: F 130;

costruire il cerchio osculatore a una data conica in un dato punto: F 131.

T LXX. Gli otto punti di contatto delle quattro tangenti comuni a due coniche giacciono sopra una terza conica: F 132;

le otto tangenti nei quattro punti di intersezione di due coniche inviluppano in una terza conica: F 133.

T LXXI. Costruire l'iperbole equilatera, dati quattro suoi punti: F 134.

T LXXII. Costruire la conica dato un suo fuoco e tre sue tangenti: F 135.

T LXXIII. Costruire i due fuochi reali di una conica, data la conica e l'asse focale: F 136;

costruire la conica dati i suoi due fuochi reali e una sua tangente: F 137.

T LXXIV. Costruire la conica reciproca a un dato triangolo passante per due punti dati: F 138;

costruire la conica reciproca a un dato triangolo e tangente a due rette date: F 139.

T LXXV. Conica dei nove punti: F 140;

cerchio dei nove punti: F 141.

T LXXVI. Il cerchio dei nove punti è tangente ai sedici cerchi iscritti ed exinscritti quattro a quattro nei quattro triangoli, che determinano a tre a tre i quattro lati del quadrangolo: F 142.

T LXXVII. Costruire la curva del terz'ordine, intersezione in fascio di coniche ed un fascio di raggi proiettivi: F 143.

T LXXVIII. Costruire la curva del quart'ordine, intersezione di due fasci di coniche proiettivi: F 144.

T LXXIX. Costruire la curva del quart'ordine, intersezione di due fasci di raggi di seconda classe proiettivi: F 145.

T LXXX. Dato un triangolo e un trilatero riferiti tra loro biunivocamente, costruire la curva del terz'ordine, luogo, dal punto, dal quale i vertici del triangolo sono proiettati sui lati corrispondenti del trilatero in tre punti allineati: F 146.

IV Album Bonessio (anno accademico 1930-1931).

L'album presenta una copertina in seta senza diciture e manca di frontespizio.

Le tavole sono tutte bianche, salvo una che è a fondo nero. Esse sono disegnate a un colore (nero, bianco nel caso della tavola a fondo nero), a due colori (rosso e nero) a tre colori (nero, marrone chiaro, marrone scuro) a cinque colori (nero, azzurro chiaro, azzurro scuro, marrone chiaro, marrone scuro). Le linee possono essere intere o tratteggiate e più o meno spesse. Vi sono tavole che contengono una, quattro, cinque, sei, nove figure.

Le tavole hanno una dimensione di 53 centimetri per 35 centimetri e una squadratura di 41 centimetri per 28. Sono firmate da Plinio Bonessio e controfirmate da Maria Del Re. L'anno accademico di composizione si può desumere dalle date apposte su di esse.

L'album è privo di indice ma le singole tavole presentano per lo più dei titoli. Esse saranno qui numerate nell'ordine progressivo nel quale appaiono nell'album con numeri romani preceduti dalla sigla T e in caso di assenza di titolo, la cosa sarà esplicitamente notata. Nel caso di presenza di più figure nella stessa tavola verrà dato il numero delle figure presenti.

T I. Quadrangolo e quadrilatero piano completo (sei figure).

T II. Pentagono piano completo.

- T III. Triangoli e trilateri prospettici ed omologici (quattro figure).
- T IV. Triangoli e trilateri prospettici ed omologici (due figure).
- T V. Pentalateri omologici.
- T VI. Pentagoni omologici.
- T VII. Esercizi sui quarti armonici (cinque figure).
- T VIII. Esercizi sui quarti armonici (due figure).
- T IX. Esercizi sull'armonia e sull'omologia (sei figure).
- T X. Esercizi sull'armonia e sull'omologia (due figure).
- T XI. Corrispondenza omologica di punti e rette (sei figure).
- T XII. Trasformazioni omologiche di quadrilateri e di triangoli (cinque figure).
- T XIII. Trasformazione omologica del cerchio in ellisse.
- T XIV. Trasformazione omologica del cerchio in parabola.
- T XV. Trasformazione omologica del cerchio in iperbole.
- T XVI. Trasformazioni omologiche del cerchio.
- T XVII. Omologia.
- T XVIII. Affinità.
- T XIX. Simmetria obliqua.
- T XX. Coniche tangenti.
- T XXI. Coniche tangenti
- T XXII. Rette e coniche tangenti.
- T XXIII. Coniche oscuratrici.
- T XXIV. Parabola oscuratrice ad un cerchio.
- T XXV. Coniche oscuratrici.
- T XXVI. Coniche oscuratrici.
- T XXVII. Coniche sovraosculatrici.
- T XXVIII. Coniche sovraosculatrici.
- T XXIX. Coniche sovraosculatrici.
- T XXX. Coniche sovraosculatrici.
- T XXXI. Coniche sovraosculatrici.
- T XXXII. Conica per punteggiate proiettive.
- T XXXIII. Ellisse per fasci proiettivi.
- T XXXIV. Parabola per punteggiate proiettive.
- T XXXV. Iperbole per fasci proiettivi.
- T XXXVI. Parabola per fasci proiettivi.
- T XXXVII. Iperbole per fasci proiettivi paralleli.
- T XXXVIII. Cerchio e iperbole equilatera per fasci proiettivi paralleli.
- T XXXIX. Esagoni di Pascal (sei figure).
- T XL. Seilateri di Brianchon (sei figure).
- T XLI. Applicazione del teorema di Pascal.
- T XLII. Applicazione del teorema di Brianchon.
- T XLIII. Applicazione del teorema di Pascal.

- T XLIV. Teorema della trasversale.
 T XLV. Teorema di Maclaurin.
 T XLVI. Teorema di Maclaurin.
 T XLVII. Teorema di Poncelet.
 T XLVIII. Applicazione del teorema di Maclaurin.
 T XLIX. Applicazione del teorema di Poncelet.
 T L. Applicazione del teorema di Desargues.
 T LI. Applicazione del teorema di Sturm.
 T LII. Problemi di secondo grado (quattro figure).
 T LIII. Problemi di secondo grado (quattro figure).
 T LIV. Punti di incontro di una retta con una conica (due figure).
 T LV. Tangenti condotte da un punto ad una conica (due figure).
 T LVI. Costruzioni degli assintoti.
 T LVII. Applicazioni del teorema di Desargues.
 T LVIII. Applicazioni del teorema di Desargues.
 T LIX. Parabole di un fascio.
 T LX. Coniche per tre punti e due tangenti.
 T LXI. Coniche per tre tangenti e due punti.
 T LXII. Problemi di falsa posizione (due figure).
 T LXIII. Problemi di falsa posizione (due figure).
 T LXIV. Coniche omografiche.
 T LXV. (Senza titolo).
 T LXVI. (Senza titolo), (due figure).
 T LXVII. Costruzione del polo e della polare (quattro figure).
 T LXVIII. Coniche aventi in comune: polo, polare, due punti e una tangente.
 T LXIX. Coniche aventi in comune: polo, polare, due tangenti e un punto.
 T LXX. Cerchio per un punto reale e due complessi coniugati (tre figure).
 T LXXI. Conica per tre punti reali e una coppia di complessi coniugati.
 T LXXII. Conica per tre punti ed una coppia di complessi coniugati.
 T LXXIII. Conica per una tangente reale e due coppie di complessi coniugati.
 T LXXIV. Conica per un punto reale e due coppie di complessi coniugati.
 T LXXV. Conica per un punto reale e due coppie di complessi coniugati.
 T LXXVI. Coniche per tre tangenti reali e una coppia di punti complessi coniugati.
 T LXXVII. Coniche aventi un fuoco e due punti in comune.
 T LXXVIII. Trasformazione omologica di una conica in un cerchio.
 T LXXIX. Cerchio oscutore e sovraoscutore ad una conica.
 T LXXX. Costruzione del centro, degli assi e degli asintoti di una conica.
 T LXXXI. Fascio-schiera di coniche bitangenti.
 T LXXXII. Fascio-schiera di coniche sovraosculatrici.

T LXXXIII Cerchi tangenti ad un cerchio dei nove punti.

LXXXIV. Coniche bitangenti (tavola disegnata bianco su nero).

V Album Latour (anno accademico 1932-1933).

L'album è certamente quello che manifesta più nitidamente una volontà d'arte che serpeggia anche in altri, in particolare in quello Massari. Esso è munito di una custodia in tela nera; i fogli, di grande dimensione, sono di carta ruvida di grammatura massiccia di colore nero (il tratto grafico prevalente è quello bianco in maniera tale da avere un effetto lavagna, bianco su nero); sono separati l'uno dall'altro da fogli di carta trasparente di protezione. Sulla custodia è incisa in caratteri d'oro e in maiuscolo la frase *Esercitazioni grafiche di Geometria proiettiva*, il nome dell'autore *Afredo Latour*, l'anno *Anno XI* (il riferimento, naturalmente, è all'era fascista).

La copertina è nera cartonata con dorso ed angoli in pelle, fregi e scritte in oro. Su di essa è riportato un disegno di geometria proiettiva in bianco. Le frasi riportate riprendono quelle della custodia con l'aggiunta, sempre in maiuscolo *Avviamento All'Ingegneria*.

La seconda di copertina, nera, è decorata con un disegno di geometria proiettiva, che occupa anche il recto della pagina di rispetto, in bianco, marrone, verde marcio, viola; lo stesso accade per la terza di copertina e per la quarta.

Sul frontespizio, nero, sono riportate, sulla destra in bianco, le diciture presenti sulla copertina; sono presenti, in basso, anche la data in anni dell'era fascista e lo stesso fascio littorio; sulla sinistra è rappresentata di profilo una scala; sui gradini sono incisi in ordine crescente e a caratteri maiuscoli i nomi dei fondatori della disciplina, Euclide, Desargues, Pascal, Poncelet, Steiner, Chasles, Staudt. L'impressione generale è quella di una composizione di tipo futurista, ma con una ricerca di monumentalità, tipica di tante opere del Ventennio.

Le tavole sono disegnate, come accennato, su fondo nero e possono essere ad un colore (bianco), due colori (bianco e marrone, bianco e rosa, bianco e rosso, bianco e giallo), tre colori (bianco, giallo e verde; bianco, giallo, viola; bianco, verde, rosso; bianco, viola, marrone; bianco verde, marrone; bianco, viola, giallo), quattro colori (bianco, giallo, verde, rosso; bianco, giallo, verde, viola; bianco, giallo, viola, rosso). Le linee possono essere continue o tratteggiate e presentano uno spessore variabile. Vi sono tavole che contengono una, due, tre, quattro e sei figure.

Le tavole hanno una dimensione di centimetri 64 per 50 e una squadratura di centimetri 55 per 46. Esse sono firmate da Alfredo Latour e controfirmate da Maria Del Re.

L'album è dotato di un indice di tipo analitico sistematico, cioè agli argomenti elencati non in ordine alfabetico, ma nel loro ordine logico vengono associate le tavole, numerate nell'elenco che segue con un numero romano preceduto dalla sigla T, e le figure numerate con un numero arabo preceduto dalla sigla F presenti nelle tavole, che di quell'argomento trattano. All'indice segue una tavola nella quale sono descritte graficamente le relazioni tra i vari argomenti trattati e viene specificato l'uso dei simboli grafici e dei colori, in relazione ai vari oggetti geometrici rappresentati

(1) Varie forme di ennagoni ed ennilateri.

Quadrangolo piano completo regolare: T I, F 1.

Quadrangolo piano completo regolare con il quarto vertice interno formato dai primi tre: T I, F 2.

Quadrangolo piano completo regolare con un punto diagonale all'infinito: T I; F 3.

Quadrangolo piano completo regolare con due punti diagonali all'infinito: T I; F 5.

Quadrangolo piano completo regolare con un vertice all'infinito: T I; F 6.

Quadrangolo piano completo regolare con due vertici all'infinito: T I; F 4.

Quadrangolo piano completo regolare con due lati paralleli: T II; F 7.

Pentilatero piano (senza rette diagonali): T II; F 8, F 10.

(2) Quaterne armoniche.

Varie forme proprietà di quaterne armoniche: T VI; F 18-26.

Costruzione delle polari di un punto rispetto ai vertici di un triangolo: VII; F 27.

Dato un triangolo diagonale di un vertice di un quadrangolo costruire il quadrangolo: T VII; F 28.

Dati un trilatero diagonale ed un lato di un quadrilatero costruire il quadrilatero: T <vii, F 29.

Dati tre punti A, B, C, costruire il quarto D grande tale che si abbia: $(A B C) = -1$ (varie soluzioni): T VII bis; F 29 I, F 29 II, F 29 III, F 29 IV.

(3) Omologia piana.

Due triangoli prospettivi ed un terzo sono omologhi tra loro: T III; F 11.

Triangoli omologici: T III; F 12.

Triangoli omologici: T III; F 13.

Congiungere mediante una retta un punto dato col punto di incontro inaccessibile due rette date: T III; F 14.

Tre triangoli omologici a due a due: T V; F 16.

Tre triangoli omologici a due due: T V; F 17.

Dato un punto, trovare il corrispondente in una data omologia: T VII; F 30.

Data una retta, trovarne la corrispondente in una data omologia: T VII; F

31.

Invariante di una omologia armonica: T VII; F 32.

Costruzione delle rette limiti: T VII; F 33, F 34, F 35.

(3 a) Trasformazioni omologiche.

Dato un cerchio trovare un omologia che lo trasformi in ellisse: T VIII; F

36.

Dato un cerchio, trovare un omologia che lo trasformi in parabola: T IX; F

37.

Dato un cerchio, trovare un omologia che lo trasformi in iperbole: T X; F

38.

Dato un quadrangolo, trovare un omologia che lo trasformi in rettangolo: T

XI; F 39.

Dato un quadrangolo, trovare un omologia che lo trasformi in quadrato: T

XII; F 44.

Dato un quadrangolo, trovare un omologia che lo trasformi in losanga: T

XI; F 40.

Dato un quadrangolo, trovare un omologia che lo trasformi in triangolo isoscele: T XII; F 41.

Dato un quadrangolo, trovare un omologia che lo trasformi in triangolo equilatero: T XII; F 42.

(3 b) Trasformazione di coniche con omologie.

Date quattro tangenti di una conica, per un punto di contatto, costruirla: T XIII; F 45.

Dati quattro punti di una conica in una tangente costruirla: T XIV; F 46.

Costruire una conica osculatrice ad un cerchio in un punto dato e tangente a due rette date: T XV; F 47.

Costruire una conica osculatrice al cerchio in un punto dato e passante per due punti dati: T XVI; F 48.

Costruire una conica sovra osculatrice al cerchio in un punto dato e passante per un punto dato: T XVII; F 49.

Costruire una conica sovraosculatrice al cerchio in un punto dato e tangente ad una retta data: T XVII; F 50.

Costruire una conica oscuratrice al cerchio in un punto dato, che passi per un punto dato, che tocchi in una retta data (con due disegni esplicativi): T XVIII; F 51, F 52, F 53.

Relazione omologica esistente fra due coniche quattro punti in comune: T XIX; F 54.

(3 c) Omotetia.

Esempi di omotetia diretta: T XX; F 54bis, F 55.

Ingrandimento triplo di una modanatura a gola diritta: T XXI; F 60.

Esempi di omotetia inversa: T XX; F 56.

(3 d) Omologia affine e simmetrie.

Trasformazione di un cerchio in ellisse mediante omologia affine: T XX; F 59.

Esempi di simmetria: T XX; F 56, F 57.

(3 e) Scale armoniche.

Vari tipi di scale armoniche: T XXII; F 61-64.

(4) Problemi sulle forme proiettive.

Dati un punto unito e due coppie di punti omologhi di due punteggiate proiettive sovrapposte, costruire l'altro punto unito e costruire la proiettività: T XXII bis; F 64 I.

Dati un raggio unito e due coppie di raggi omologhi di due fasci proiettivi di raggi, costruire l'altro raggio unito costruire la proiettività: T XXII bis; F 64 II.

Costruire due punteggiate proiettive sovrapposte paraboliche, dati l'unico punto unito ed una coppia di punti corrispondenti: T XXII bis; F 64 III.

Costruire due punteggiate proiettive sovrapposte, dati l'unico punto unito all'infinito e una coppia di punti corrispondenti: T XXII bis; F 64 IV.

Costruzione dell'ellisse involuppo mediante due punteggiate proiettive (con disegno esplicativo): T XXIII; F 65, F 66.

Costruzione della parabola involuppo mediante due punteggiate proiettive: T XXIV; F 67.

Costruzione della parabola involuppo mediante due punteggiate proiettive di cui una all'infinito: T XXIV; F 68.

Costruzione dell'iperbole involuppo mediante due punteggiate proiettive: T XXV; F 69.

Costruzione del cerchio mediante due punteggiate proiettive: T XXVI; F 70.

Teorema di Steiner - generazione dell'ellisse luogo mediante due fasci proiettivi: T XXVII; F 71.

Costruzione della parabola mediante due fasci proiettivi, di cui uno col centro all'infinito (centro di collineazione all'infinito); T XXVIII; F 72.

Costruzione della parabola mediante due fasci proiettivi, di cui uno col centro all'infinito (centro di collineazione al finito): T XXIX; F 73.

Costruzione della conica generata da due fasci prospettivi: T XXIX; F 74.

Costruzione dell'iperbole mediante due fasci proiettivi: T XXX; F 75.

Costruzione dell'iperbole equilatera mediante due fasci proiettivi: T XXXI; F 76.

Costruzione del cerchio mediante due fasci proiettivi: T XXXII; F 77.

(5) Costruzioni delle coniche mediante i teoremi di Pascal e Brianchon.

Disegno dimostrativo del teorema di Pascal: T XXXIII; F 78.

Disegno dimostrativo del teorema di Brianchon: T XXXIV; F 79.

Dati cinque punti, costruire la conica che passa per essi e la tangente in un suo punto (costruzione fatta mediante fasci proiettivi): T XXXV; F 80.

Dati cinque punti costruire la conica che passa per essi e la tangente in un suo punto (costruzione fatta mediante il teorema di Pascal): T XXXVI; F 81.

Date cinque rette, costruire la conica che risulta tangente alle rette date e un punto di contatto: T XXXVI; F 82.

Quadrangolo inscritto in una conica (teorema di Pascal, caso particolare): T XXXVII; F 83.

Quadrilatero circoscritto ad una conica (teorema di Brianchon, caso particolare): T XXXVII; F 84.

Dati quattro punti ad una retta costruire la conica che passi per i punti dati e risulti tangente alla retta data (costruzione fatta mediante fasci proiettivi): T XXXVIII; F 86.

Dati quattro punti ed una retta costruire la conica che passi per i punti dati e risulti tangente alla retta data (costruzione fatta mediante il teorema di Pascal): T XXXVIII; F 87.

Date quattro tangenti ed un punto di contatto costruire la conica ed un altro punto di contatto: T XXXIX; F 88.

Trilatero circoscritto ad una conica (teorema di Brianchon, caso particolare): T XXXIX; F 89.

Dati tre punti ed un asintoto costruire l'iperbole (costruzione fatta mediante fasci proiettivi): T XL; F 90.

Dati tre punti ed un asintoto costruire l'iperbole (costruzione fatta mediante il teorema di Pascal): T XL; F 91.

Dati tre tangenti ed un assintoto costruire l'iperbole T XLI; F 92.

Dati tre punti nella direzione dell'asse costruire la parabola (costruzione fatta mediante fasci proiettivi) : T XLII; F 93.

Dati tre punti e la direzione dell'asse costruire la parabola (costruzione fatta mediante il teorema di Pascal): T XLII; F94.

Date tre tangenti e la direzione dell'asse costruire la parabola: T XLIII; F 95.

Dati tre punti e due tangenti costruire la conica (costruzione fatta mediante fasci proiettivi): T XLIV; F 96.

Dati tre punti e due tangenti costruire la conica (costruzione fatta con il teorema di Pascal): T XLIV; F 97.

Dati tre tangenti e due punti, costruire la conica: T XLIV; F 98.

Dati due punti, la tangente in uno di essi e la direzione dell'asse, costruire la parabola (costruzione fatta mediante fasci proiettivi): T XLV; F 99.

Dati due punti, la tangente in uno di essi e la direzione dell'asse, costruire la parabola (costruzione fatta mediante il teorema di Pascal). T XLV; F 100.

Date due tangenti, il punto di contatto su una di esse e la direzione dell'asse, costruire la parabola: T XLVI; F 101.

Dato un punto e i due assintoti, costruire l'iperbole (costruzione fatta mediante i fasci proiettivi): T XLVII; F 102.

Dato un punto e i due assintoti, costruire l'iperbole (costruzione fatta mediante il teorema di Pascal) T XLVII; F 103.

Data una tangente e i due asintoti costruire l'iperbole: T XLVIII; F 104.

(6) Costruzione delle coniche mediante i teoremi di Maclaurin, Poncelet, Desargues, Sturm.

Costruzione della conica mediante il teorema di Maclaurin: T XLIX; F 105.

Costruzione della conica mediante il teorema di Poncelet: T XLIX; F 106.

Costruzione della conica mediante il teorema di Desargues: T L; F 107.

Costruzione della conica mediante il teorema di Sturm: L; F 108.

Costruzione dei punti uniti di una proiettività tra forme sovrapposte (problema di secondo grado): T LI; F 109.

Duale del precedente: T LI; F 110.

Costruire le coniche passanti per quattro punti dati e tangenti a due rette: T LII; F 112 II.

Costruire le parabole circoscritte ad un quadrangolo dato: LIII, F 112 III, F 112 IV.

(6 a) Problemi di falsa posizione.

Dati quattro rette e quattro punti, costruire i quadrangoli i cui lati passino per i punti dati e i cui vertici tocchino le rette date: T LIII prima, F 112 V.

Data una conica e tre punti, costruire i triangoli i cui lati passino per i punti dati e i cui vertici tocchino le rette date (Problema di Giordano): LIII seconda; F 112 VI.

Trasformazione omografica del cerchio involuppo. T LIV; F 112 III.

(7) Polarità rispetto alla conica.

Disegni dimostrativi delle varie proprietà del polo e della polare: T LV; F 113, F 114.

Dato un arco di conica trovare a che specie di conica appartiene (ellisse): T LVCI; F 115.

Dato un arco di conica trovare a che specie di conica appartiene (iperbole): T LVI; F 116.

Data una ellisse ed un punto fuori di essa tirare per quel punto di tangenti alla curva: T LVI; F 117.

Data una iperbole ed un punto fuori di essa tirare per quel punto le tangenti a una curva: T LVI; F 118.

Dati tre punti di una conica, il polo e la polare, costruire la conica: T LVII; F 119.

Dati il polo e cinque punti di una conica costruire la polare: T LVII; F 120.

Dati cinque punti di una ellisse e la polare, costruire il polo: T LVIII; F 121.

Dati cinque punti di un'iperbole e la polare all'infinito, costruire il polo: T LVIII; F 122.

Data una conica trovare il centro e gli assi: T LIX; F 123.

Trasformare una conica in un cerchio mediante una omologia: T LIX; F 124.

Trasformare una conica in un cerchio mediante una omologia affine: T LX; F 125.

Dati un vertice, un lato, l'altezza, una mediana di un triangolo e la bisettrice di un suo angolo, costruire il triangolo (con $h < b < m$): T LXI; F 126.

Lo stesso (con $h < m < b$): T LXI; F 127.

Dato un punto reale ed una coppia di punti complessi coniugati, costruire il cerchio passante per il punto reale e i due complessi coniugati: T LXI; F 128.

Dato un punto reale e due coppie di punti complessi coniugati, costruire la conica passante per il punto reale e le due coppie di punti complessi coniugati: T LXII; F 129.

Dati tre punti reali e due complessi coniugati costruire la conica passante per essi: T LXIII; F 130.

Data una conica, trovare un cerchio oscutore alla conica in un punto dato: T LXIV; F 131.

Lo stesso (altra costruzione valida anche nel caso in cui il punto di osculazione dato sia un vertice di una conica): T LXV; F 132.

Applicazione della costruzione precedente: T LXVI; F 133.

Dati due punti complessi e tre tangenti costruire le coniche passanti per i punti complessi e tangenti alle rette date: T LXVII; F 134.

Dati due punti di una conica ed un triangolo autoreciproco, costruire la conica: T LXVIII; F 135.

6 - TERZA SEZIONE: MISCELLANEA

I Materiale iconografico.

Si tratta di varie fotografie, talora in copia, che rappresentano Pasquale Del Pezzo, raffigurato in diverse epoche della sua vita; Maria Del Re, anch'ella ritratta in differenti età; gruppi di matematici, ripresi in occasione di convegni; Nella Tommasini, nipote di Maria Del Re e protagonista dell'epistolario Caccioppoli-Del Re (Carbone, Talamo 2010b). Vale la pena di osservare che varie immagini della Del Re da sola o con Del Pezzo hanno come sfondo quel gabinetto di geometria proiettiva che lo stesso Del Pezzo aveva arredato utilizzando alcune opere d'arte da lui salvate dalla distruzione, come ad esempio parti dell'antico refettorio del collegio Massimo dei Gesuiti (Carbone *et al.* 1998), e che aveva impreziosito anche con parti di collezioni librerie di grande rilevanza, come ad esempio della collezione Davis (Carbone *et al.* 2001).

È conservata nel fondo anche una curiosa silhouette in legno, colorata, che rappresenta una caricatura di Pasquale Del Pezzo.

Sono presenti anche due singolari cartoline postali: una raffigura la cappella Del Pezzo, opera dello scultore Gerolamo Santacroce nella chiesa di santa Maria di Monteoliveto in Napoli; l'altra, stampata in occasione della laurea della Del Re come ricordo, raffigura degli antichi sapienti in atto di misurare il globo terrestre.

II Composizioni poetiche.

Si tratta di quattro scherzi poetici, due sono opera di Renato Caccioppoli e sono stati pubblicati in (Carbone, Talamo 2010b); un terzo, di natura assai salace, composto in occasione di un evento conviviale è di autore al momento non individuato, la prima strofa è stata pubblicata nel lavoro succitato; un quarto, sulla base di un'analisi calligrafica, può essere attribuito a Pasquale Del Pezzo; si tratta di una composizione di stile classicheggiante e di tema amoroso.

Quest'ultima composizione trovava posto sulla seconda di copertina della copia personale, posseduta da Maria Del Re, delle lezioni di geometria proiettiva di Pasquale Del Pezzo (Del Pezzo 1920). E' facile immaginare che fosse dedicata proprio alla Del Re. La riportiamo come indizio da un lato delle tendenze e dei gusti artistici di Del Pezzo (che aveva sposato, è bene ricordarlo, la scrittrice svedese Anne Charlotte Leffler, sorella del celebre matematico Mittag Leffler) dall'altro dell'atmosfera del salotto culturale tenuto proprio dalla Del Re.

Diana fasci di raggi riversa
intra i fulgidi seni del celo,
inaccessa, adamantina. Anelo
che m'inondi la luce tua tersa.

Con la vista all'empireo conversa
ho sugli occhi di lacrime un velo.
Nulla speme ho dell'alma sul gelo
che in un mare d'angoscia è sommersa

O regina di fiere proterva,
vuoi tu l'arte furare a Minerva?
Ma se l'arco tuo curvo saetta,
Endimion nel bosco t'aspetta.

Va segnalato che un altro scherzo poetico d'occasione di del Pezzo è conservato nel fondo Cesàro sempre presso il dipartimento di Matematica "Renato Caccioppoli" dell'università di Napoli "Federico II" (Carbone *et al.* 1997).

III Documenti personali.

Si tratta di qualche documento concernente la Del Re (come ad esempio il suo libretto universitario) e la nipote Nella Tommasini (è conservato un attestato relativo ai suoi studi universitari).

Va segnalata anche la presenza di varie copie di una convocazione dell'Accademia Pontaniana per l'adunanza del 5 giugno 1927 nella quale la Del Re avrebbe letto una sua memoria dal titolo "Dello Spazio". Sembra che per la prima volta nell'Accademia Pontaniana una donna discuteva un tema di scienze esatte e questo dovette essere per Maria fonte d'orgoglio (Del Re M. 1927).

7 - CENNI BIOGRAFICI

Vengono qui dati brevi cenni biografici dei personaggi citati, eccezion fatta per quelli menzionati nelle descrizioni dei contenuti degli album. Si cercherà di mettere in luce anche i legami di scuola e di parentela intercorrenti, soprattutto tra quanti hanno giocato un ruolo nell'insegnamento della geometria nell'università di Napoli.

Per ciascun personaggio viene data una fonte, quella di preferenza più facilmente accessibile, che talora non è la più aggiornata.

Notizie più diffuse verranno fornite in relazione a taluni personaggi scientificamente di minore rilevanza, attivi presso l'università di Napoli con significativi ruoli didattici, perché di più difficile reperimento.

Amaturo Enrico (Salerno 1863- ?): laureato in matematica nel 1884 e in ingegneria civile nel 1886, fu assistente alle lezioni di disegno di geometria descrittiva presso l'università di Napoli per una quindicina d'anni a partire dal 1887, fu libero docente (conseguì la libera docenza il 23 giugno 1899) ancora di geometria descrittiva e poi incaricato della stessa disciplina agli inizi degli anni Venti (notizie tratte dagli annuari dell'Università di Napoli e, per quanto concerne la data di nascita, dalla sezione "Matematici Italiani" della Società Italiana di Storia della Matematica).

Amodeo Federico (Avellino 1859-Napoli 1946): insegnò all'istituto tecnico di Napoli, fu coadiutore alla cattedra di calcolo differenziale e integrale negli anni Novanta dell'Ottocento, libero docente di geometria proiettiva (conseguì la libera docenza il 7 giugno 1885) e professore incaricato di storia della matematica per una decina d'anni (fino alla guerra libica, quando l'incarico fu eliminato) all'università di Napoli, in numerosi concorsi fu dichiarato eleggibile (Carbone *et al.* 2000).

Andreoli Giulio (Napoli 1892-Napoli 1969): fu professore di analisi matematica presso l'università di Catania e, in seguito, di Napoli; ebbe ruoli significativi durante il Ventennio fascista, fu epurato e poi riammesso all'insegnamento (notizie tratte dagli annuari dell'Università di Napoli e dalla sezione "Matematici Italiani" della Società Italiana di Storia della Matematica).

Ascione Enrico (Portici 1869- Napoli 1964): insegnò presso l'istituto tecnico di Napoli, fu assistente alle lezioni di disegno di geometria proiettiva all'università di Napoli per una decina d'anni a partire dagli inizi dei Novanta dell'Ottocento e coadiutore ancora alla cattedra di geometria proiettiva all'incirca per i successivi quindici anni, fu poi libero docente (conseguì la libera docenza il 30 maggio 1898) della stessa disciplina e professore incaricato sia di geometria proiettiva che di descrittiva nella seconda metà degli anni Trenta (Fresa 1964-1965).

Bakunin Marussia (Krasnojarsk 1873-Napoli 1960): fu professore di chimica tecnologica organica presso la scuola superiore d'ingegneria dell'università di Napoli e, dal 1940 fino al pensionamento, di chimica organica presso la facoltà di scienze; era zia di Caccioppoli (Dizionario Biografico, voce a cura di R. A. Nicolaus).

Berzolari Luigi (Napoli 1863-Pavia 1949): fu professore dal 1893 all'università di Torino e, successivamente, a Pavia, Milano e ancora a Pavia; organizzò e diresse la celebre *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* (Tricomi 1962).

Birkhoff Georg David (Overisel, Michigan 1884-Cambridge, Massachussets 1944): fu professore all'università di Princeton e a quella di Harvard. Oltre che di analisi matematica si interessò anche di relatività (Enciclopedia Italiana).

Caccioppoli Renato (Napoli 1904-Napoli 1959): allievo di Picone a Napoli, fu professore di analisi all'università di Padova dal 1931 al 1934; in quell'anno ritornò all'università di Napoli sulla cattedra di teoria dei gruppi per passare nel 1936 ad analisi superiore e nel 1943 su analisi matematica. Morì suicida. Tra il 1930 e il 1959 fu punto di riferimento per tutti i ricercatori italiani in molti settori dell'analisi matematica, quali l'analisi funzionale, il calcolo delle variazioni, i problemi di area minima. (Dizionario Biografico, voce a cura di A. Figà Talamanca).

Caporali Ettore (Perugia 1855-Napoli 1886): allievo a Roma di Cremona, fu professore di geometria superiore all'università di Napoli dal 1878, morì suicida (Dizionario Biografico, voce a cura di E. Togliatti).

Carrelli Antonio (Napoli 1900- Napoli 1980): fu professore di fisica sperimentale dal 1930 a Catania e dal 1932 fino al suo pensionamento a Napoli; fu attivo soprattutto nel settore della spettroscopia; fu presidente della RAI e vicepresidente dell'EURATOM (Dizionario Biografico, voce a cura di E. Schettino).

Castelnuovo Guido (Venezia 1865-Roma 1952): fu allievo di Veronese e si formò anche, a Roma, con Cremona; fu professore di geometria analitica e proiettiva all'università di Roma dal 1891 al suo pensionamento nel 1935. Dopo studi iniziali dedicati alla geometria proiettiva negli iperspazi, con Corrado Segre e Enriques si dedicò a studi di geometria algebrica. Si interessò anche delle teorie einsteiniane sulla relatività e di calcolo delle probabilità. Fu senatore della repubblica di nomina presidenziale per alti meriti scientifici (Dizionario Biografico, voce a cura di E. Togliatti).

Cimmino Gianfranco (Napoli 1908- Bologna 1989): allievo di Picone e molto legato scientificamente e umanamente a Caccioppoli, fu, dal 1939, professore di analisi matematica all'università di Bologna. (Pini 1991).

Cremona Luigi (Pavia 1830-Roma 1903): partecipò attivamente alla prima guerra di indipendenza italiana e in particolare prese parte alla difesa di

Venezia; subì l'influenza scientifica di Bordoni e Brioschi. Dal 1860 fu professore di geometria superiore all'università di Bologna; nel 1867 si trasferì al politecnico di Milano, fondato tre anni prima da Brioschi, ove insegnò geometria superiore e statica grafica. Nel 1873 fu chiamato a dirigere la scuola di applicazioni a Roma, da poco divenuta capitale d'Italia; subito dopo ebbe all'università di quella città l'insegnamento di matematiche superiori. Fu il rinnovatore degli studi geometrici in Italia, ebbe numerosi allievi di grande valore, tra i quali Giuseppe Veronese, Eugenio Bertini, Ettore Caporali, Domenico Montesano, Giambattista Guccia e tanti altri ricercatori furono influenzati dal suo pensiero, come ad esempio lo stesso Guido Castelnuovo. Fu senatore, vice presidente del senato e, per qualche mese, ministro della Pubblica Istruzione (Dizionario Biografico, voce a cura di L. Rossi).

Del Pezzo Gaetano (Napoli 1892-Napoli 1970): figlio di Pasquale e di Anne Charlotte Leffler, scrittrice svedese e sorella di Gösta Mittag Leffler, conseguì la laurea in ingegneria, fu assistente di geometria analitica presso l'università di Napoli verso la fine degli anni Dieci e fino alla metà degli anni Venti (notizie in parte tratte dagli annuari dell'università di Napoli, in parte ricevute dal nipote *ex filio* Ferrante Del Pezzo).

Del Pezzo Pasquale (Berlino 1859-Napoli 1936): duca di Caianello, rettore, sindaco di Napoli e senatore, fu allievo di Caporali, divenne alla morte di questi professore presso l'università di Napoli prima di geometria superiore, poi (a partire dal 1905) di geometria proiettiva (Dizionario Biografico, voce a cura di F. Rossi).

Del Re Alfonso (Calitri 1859-Sorrento 1921): fu assistente di disegno di geometria proiettiva alla fine degli anni dell'Ottocento, insegnò geometria analitica e proiettiva all'università di Modena dal 1889 e, dal 1899 fino alla sua morte, geometria descrittiva in quella di Napoli (Dizionario Biografico, voce a cura di F. Rossi).

Di Giacomo Salvatore (Napoli 1860-Napoli 1934): si tratta del celebre poeta dialettale napoletano e grande erudito (Dizionario Biografico, voce a cura di A. Pellegrino).

Gallucci Generoso (Napoli 1874- Napoli 1942): fu libero docente di geometria proiettiva (conseguì la libera docenza il 17 febbraio 1908) e professore incaricato di geometria descrittiva nella seconda metà degli anni Trenta; fu docente di matematica e fisica al liceo artistico di Napoli; ebbe anche interessi filosofici ed epistemologici (Berzolari 1942).

Giordano Rosaria (Lucera 1894-Napoli 1967): fu assistente di geometria descrittiva presso l'università di Napoli a partire dalla metà degli anni Dieci del Novecento; il marito, Enrico Sorrentino, ufficiale dell'esercito italiano in missione oltre le linee tedesche, perì nella strage avvenuta in località La Storta il 4 giugno 1944 (Carbone, Talamo 2010a).

Mittag Leffler Gösta (Stoccolma 1846-Djursholm, Stoccolma 1927): fu allievo di Karl Weierstrass e professore dall'università di Stoccolma. I suoi risultati più noti riguardano le funzioni analitiche. Fondò la rivista *Acta Mathematica* e diede vita ad una fondazione per favorire lo studio delle scienze matematiche (*Enciclopedia Italiana*).

Mattioli Giandomenico (Grurnello 1890-Napoli 1946): fu professore di meccanica razionale all'università di Catania, si trasferì durante il secondo conflitto mondiale all'università di Napoli e a Napoli morì assassinato da un disertore delle forze armate alleate per motivi di rapina (Tricomi 1962).

Montesano Domenico (Potenza 1863-Salerno 1930): allievo a Roma di Cremona, dal 1888 fu professore di geometria proiettiva e descrittiva presso l'università di Bologna; nel 1893 passò a Napoli su geometria proiettiva; dal 1905 fino alla sua morte tenne l'insegnamento di geometria superiore (*Dizionario Biografico*, voce a cura di R. Gatto).

Nicodemi Rubino (Penta di Fisciano 1850 - Penta di Fisciano 1929): conseguì la sua prima libera docenza il 10 gennaio 1875, fu professore straordinario di applicazioni della geometria descrittiva dal 1884 e ordinario dal 1916 fino al pensionamento avvenuto nel 1925 presso la Regia Scuola Politecnica di Napoli (Giovanardi, Amatore 1930).

Salvatore Dino Nicola (Torre Annunziata 1843-Portici 1919): allievo di Achille Sannia, a partire dal 1882 fu professore di geometria analitica e poi di proiettiva all'università di Roma, ove subì l'influenza di Cremona; nel 1889 si trasferì in quella di Napoli sulla cattedra di geometria descrittiva, due anni dopo passò su geometria analitica, insegnamento che tenne fino alla sua morte; fu deputato alla camera (Tricomi 1962).

Sannia Achille (Campobasso 1822- Napoli 1892): tenne un famoso studio privato (dal 1853 al 1865), presso il quale si formarono varie generazioni di matematici, tra i quali il nipote e cognato Enrico D'Ovidio, Gabriele Torelli, Nicola Salvatore Dino; fu incaricato di geometria a tre coordinate e di geometria descrittiva presso la Scuola di Ponti e Strade di Napoli a partire dal 1853; dal 1863 insegnò anche disegno di geometria descrittiva all'università di Napoli; a partire dal 1873 tenne il corso di geometria superiore ancora presso l'università e, dal 1877 fino alla morte, quello di geometria proiettiva; fu deputato e senatore; fu molto legato a Cremona (Tricomi 1962).

Sannia Gustavo (Napoli 1875- Napoli 1930): figlio di Achille e nipote di Enrico D'Ovidio, dopo la laurea conseguita a Napoli, fu assistente dello zio e di Fubini a Torino. A Torino diede corsi al Politecnico. Dal 1922 fu professore all'università di Modena e dal 1924 fino alla morte insegnò geometria descrittiva all'università di Napoli. Si interessò oltre che di geometria anche di teoria della sommazione delle serie. (Tricomi 1962).

Spampinato Nicolò (Adrano 1892-Napoli 1971): professore ordinario nel 1931, insegnò geometria analitica, proiettiva e descrittiva prima all'università di

Catania, poi (e fino al pensionamento) a Napoli (notizie tratte dagli annuari dell'università di Napoli e dagli annuari della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Napoli).

Scorza Gaetano (Morano Calabro 1876-Roma 1939): laureatosi a Pisa, nel 1912 divenne professore di geometria descrittiva e proiettiva all'università di Cagliari; nel 1921 si trasferì a Napoli su geometria analitica; nel 1934 passò all'università di Roma (Tricomi 1962).

Scorza Dragoni Giuseppe (Palermo 1908-Padova 1996): figlio di Gaetano Scorza (aggiunse al suo cognome quello della madre per distinguersi dal padre) fu allievo di Picone e amico e collaboratore di Caccioppoli, fu professore, dal 1936, di analisi matematica all'università di Padova e, dal 1962, a quella di Roma; dal 1966 fu professore di algebra a Bologna (Enciclopedia Italiana).

8 - RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Parte integrante di questa bibliografia va considerata la serie degli annuari dell'università di Napoli che va dal 1915 al 1940. Da essi sono state tratte le notizie concernenti gli insegnamenti dati anno per anno, i nomi dei docenti e degli assistenti dai quali venivano dati senza che venga fatto riferimento esplicito ai singoli volumi.

Amaturo E. (1905a). *Lezioni di Geometria Descrittiva* dettate nella R. Università di Napoli. Edizione litografata, Lorenzo Alvano, Napoli, 1904-1905. Parte prima, Parte seconda, terza edizione ampliata, litografata, Raffaele Pironti Napoli, 1922.

Amaturo E. (1905b). Sui metodi della Geometria Descrittiva. *Giornale di Matematiche*, 43, 1905, pp. 29-32.

Amodeo F. (1896). *Lezioni di Geometria Proiettiva* dettate nella Regia Università di Napoli nell'anno scolastico 1895-1896 dal professore Federico Amodeo. Edizione litografata, Pellerano, Napoli 1896.

Amodeo F. (1905, 1912, 1920, 1927). *Lezioni di Geometria Proiettiva* dettate nella Regia Università di Napoli dal professore Federico Amodeo. Piero, Napoli 1905, 1912, 1920; Lorenzo Alvano, Napoli 1927.

Borrelli A., Gatto R. (2002). L'insegnamento delle scienze, in (Croce et al. 2002), pp. 675-783.

Berzolari L. (1942). Generoso Gallucci. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, (2) 4, 1942, pp. 78-79.

Carbone L., Cardone G., Palladino F. (1996). Le collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II". *Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, (4) 63, 1996, pp. 33-65.

Carbone L., Cardone G., Palladino F. (1997). Il fondo Cesàro: costituzione, recupero e consistenza. *Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, (4) 64, 1997, pp. 217-278.

Carbone L., Cardone G., Casanovas J. (s.J.), Palladino F. (1998). La sede storica degli studi superiori a Napoli nella sua attuale configurazione. *Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, (4) 65, 1998, pp. 31-66.

Carbone L., Gatto R., Palladino F. (2000). Il carteggio Amodeo. *Nuncius, Annali di Storia della Scienza*, 15, 2000, pp.681-719.

Carbone L., Gatto R., Palladino F. (2001). La costituzione di un fondo di antichi libri scientifici: il caso del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" di Napoli e la collezione Govi-Davi. *Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, (4) 67, 2001, pp. 7-15.

Carbone L., Talamo M. (2010a). Gli albori della presenza femminile nello studio della matematica presso l'Università di Napoli nell'Italia unificata. *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, (4) 67, 2010, pp.15-44.

Carbone L., Talamo M. (2010b). Caccioppoli intimo. *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, (4) 67, 2010, pp. 63-108.

Castelnuovo G. (1903). *Lezioni di Geometria Proiettiva*. Società Editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati e C., Milano-Roma-Napoli, 1903-1905.

Ciliberto C., Sallent Del Colombo E. (2013). Pasquale Del Pezzo, Duke of Caianello, Neapolitan Mathematician. *Archive for History of Exact Sciences*, 67, 2013, pp. 171-215.

Croce A., Tessitore F., Conte D. (2002) (curatori). *Napoli e la Campania nel Novecento. Diario di un secolo. V. III*, Edizioni del Millennio, Napoli, 2002.

Dizionario Biografico degli Italiani, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, 1960-.

Del Pezzo P. (1913, 1920). *Principi di Geometria Proiettiva*. Lezioni dettate nell'Università di Napoli dal Prof. Pasquale Del Pezzo. Terza edizione, Lorenzo Alvano, Napoli, 1920; nell'anno 1919-1920, Lorenzo Alvano, Napoli, 1920.

Del Re A. (1900). *Geometria Proiettiva ed Analitica*. Lezioni di Alfonso Del Re. Generalità e geometria di forme reali ad una coordinata reale o complessa (con 244 esercizi e 135 figure intercalate nel testo). G. Vincenti e nipote, Modena, 1900.

Del Re A. (1905, 1920). *Geometria Descrittiva*. Appunti di lezioni dettate nella R. Università di Napoli dal prof. A. Del Re (anno scolastico 1904-05), edizione litografata, Lorenzo Alvano, Napoli 1905, (anno scolastico 1919-20), edizione litografata, Raffaele Pironti, Napoli, 1920.

Del Re A. (1906). *Lezioni sulle forme fondamentali dello spazio rigato, sulla dottrina degli immaginari e sui metodi di rappresentazione nella Geometria Descrittiva*. Lorenzo Alvano, Napoli 1906.

Del Re A. (1907). *Lezioni di algebra della logica ad uso degli studenti delle facoltà di matematica e di filosofia e lettere, dettate nella R.. Università di Napoli dal prof. A. Del Re*. Tipografia della Regia Accademia delle Scienze, Napoli, 1907.

Del Re M. (1927). *Dello spazio*. *Atti dell'Accademia Pontaniana*, (2) 57, 1927, pp. 108-122.

Del Re M. (1940). *Esercizi di geometria proiettiva*. Circolo matematico di Catania per i tipi della Tipografia Gambardella, Napoli, 1940.

Enciclopedia Italiana, edizione online. Istituto dell'Enciclopedia Italiana.

Fresa A. (1964-1965). Enrico Ascione. *Atti dell'Accademia Pontaniana*, (nuova serie) 14, 1964-1965, pp. 284-289.

Gallucci G. (1936). *Lezioni di Geometria Descrittiva con elementi di Proiettiva*. Anno Accademico 1935-36. A. Rondinella, Napoli 1936.

Gallucci G. (1938). *Geometria Analitica con elementi di Proiettiva ed esercitazioni*. Napoli, 1938.

Gatto R. (2000). *Storia di un'anomalia. Le facoltà di scienze dell'università di Napoli tra l'Unità di'Italia e la riforma Gentile*. Fridericiana Editrice Universitaria, Napoli, 2000.

Sorrentino Giordano R. (1942). *Esercizi di Geometria Descrittiva*. Volume primo: tavole; volume secondo: spiegazione delle tavole. Circolo matematico di Catania per i tipi della tipografia Gambardella, Napoli 1942.

Giovanardi M., Amato E. (1930). Rubino Nicodemi. *Annuario della Scuola di Ingegneria di Napoli*, anno 1929-1930, pp. 236-240.

Miranda C. (1977). Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli. *Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, (4) 44, 1977, pp. 1-38.

Montesano D. (1899, 1905). *Lezioni di Geometria Proiettiva dettate dal prof. D. Montesano nella R. Università di Napoli*. Contini, Napoli 1899; Cavaliere, Napoli, 1905.

Nicodemi R. (1880). *Elementi di Geometria Descrittiva pel dottor R. Nicodemi*. A. Morano, Napoli 1880.

Nicodemi R. (1884). *Applicazioni di Geometria Descrittiva*. Edizione litografata, Litografia della Trinacria, Napoli 1884.

Nicodemi R. (1914). *Prospettiva*. Raffaele Pironti, Napoli, 1914.

Pini B. (1991). Gianfranco Cimmino, in (Vanni, Negrini 1991), pp. 105-111.

Salvatore Dino N. (1885). *Elementi di Geometria Proiettiva di N. Salvatore Dino*, professore nella Regia Università di Roma. Domenico Morano, Napoli 1885.

Salvatore Dino N. (1914). *Elementi di Geometria Analitica per gli studenti di ingegneria, con appendice geometrica sulle proprietà fondamentali delle quadriche*. Raffaele Pironti, terza edizione litografata, Napoli, 1914.

Salvatore Dino N. (1918). *Elementi di Geometria analitica per gli studenti di ingegneria*. Tommaso e Raffaele Pironti, quinta edizione, Napoli, 1918.

Sannia G. (1920). *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva dettate nel R. Politecnico di Torino dal prof. G. Sannia*. Volume primo: testo; volume secondo: esercizi. Perotti, Torino 1920.

Sannia G. (1926,1930). *Lezioni di Geometria Descrittiva per gli studenti di Ingegneria*. Majo, Napoli 1926; E. Stolfi, Napoli 1930.

Scorza G. (1921). *Corpi, numeri ed algebre*. Principato, Messina, 1921.

Scorza G. (1923). *Elementi di Geometria Analitica*. Anno accademico 1922-1923, Ristampa. Edizione litografata, G. Majo, Napoli 1923.

Scorza G. (1925). *Elementi di Geometria Analitica*. Principato, Messina, 1925.

Tricomi F. (1962). *Matematici italiani del primo secolo dello Stato Unitario*. Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze fisiche, matematiche, naturali, (4) 1, 1966, pp.1-120.

Vanni A., Negrini D. (1991). *Il dipartimento di matematica dell'università di Bologna*. Personale, strutture, attività di ricerca. Aa 1990-1991. Editrice CLUEB, Bologna 1991.

Well-posed Stampacchia Type Quasi-variational Inequalities

Nota di Nunzia A. D'Auria¹

Presentata dal socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 7 Marzo, 2014)

Key words: Quasi-variational inequality, monotone operator, hemicontinuous operator, set-valued map, fixed point.

Abstract - We introduce the concepts of S -well-posedness and S -well-posedness in generalized sense for quasi-variational inequalities of Stampacchia type. We present metric characterizations, in terms of suitable approximate solutions, and sufficient conditions for S -well-posedness and S -well-posedness in generalized sense.

Riassunto - In questa nota si introducono i concetti di S -buona-posizione e di S -buona-posizione in senso generalizzato per disequazioni quasi-variazionali del tipo Stampacchia. Si presentano caratterizzazioni metriche e condizioni sufficienti per i due concetti usando opportune soluzioni approssimate.

1 - INTRODUCTION

The classical Stampacchia type quasi-variational inequality (SQVI for short) consists in finding a point $\bar{u} \in K$ such that

$$(Q) \quad \bar{u} \in F(\bar{u}) \text{ and } \langle A\bar{u}, \bar{u} - v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in F(\bar{u}),$$

where V is a Banach space, K is a non-empty closed convex subset of V , F is a set-valued map from K to K and A is an operator from V to the dual space V^* .

This problem has been introduced in (Bensoussan-Lions, 1973) and has been further investigated from different aspects in (Aubin, 1979), (Mosco, 1976), (Baiocchi-Capelo, 1984), (Lignola-Morgan, 1997), (Morgan-Romaniello, 2003)...

¹Department of Mathematics and Applications R. Caccioppoli University of Naples Federico II Via Claudio 21, 80125 - Naples, Italy, e.mail nudauria@unina.it

Recently, the interest in quasi-variational inequalities has been increased due to the numerous economic and engineering problems that can be modelled as a quasi-variational inequality (Baiocchi-Capelo, 1984), (Harker-Pang, 1990), (Fukushima-Pang, 2005), (Barrett-Prigozhin, 2010), (Barrett-Prigozhin, 2013), (Morgan-Prieur, 2013)...

Therefore, developing numerical methods for quasi-variational inequalities has become more important (Kořvara-Outrata, 1995), (Noor-Memon, 2002), (Antipin et al., 2011). Consequently, investigating well-posedness properties for quasi-variational inequalities, or for more general problems, has increased in relevance, since the convergence of numerical methods can be deduced by the well-posedness property (Dontchev-Zolezzi, 1993), (Lignola-Morgan, 2000). At our knowledge, papers concerned with well-posedness for SQVI's or for more general problems (Lignola-Morgan, 2006), (Yu et al., 2007), (Ceng et al., 2008), (Ceng-Yao, 2008) are in line with (Lignola-Morgan, 2000) and (Lignola, 2006) where the well-posedness condition is defined through suitable approximating sequences and characterized using suitable sets of approximate solutions. In this paper, we introduce the new concept of $\mathcal{S}$ -approximating sequence and the new concept of $\mathcal{S}$ -well-posedness for SQVI's and we characterize it by the convergence to zero of the diameters of appropriate approximate solutions sets S_ε . The sets S_ε have been considered for more general quasi-variational problems in (Lignola-Morgan, 2012) where their stability properties have been investigated. We also present classes of data which guarantee well-posedness for SQVI's and connections with previous results.

Moreover, since a Stampacchia-type quasi-variational inequality may generally have more than one solution (Baiocchi-Capelo, 1984), we also introduce the concept of well-posedness in generalized sense, we characterize it through the convergence to zero of the non-compactness measure of S_ε and we produce sufficient conditions for well-posedness in generalized sense.

The paper is organized as follows: in Section 2 we recall useful concepts and results; in Section 3 and in Section 4 we define and investigate well-posedness for Stampacchia type quasi-variational inequalities having, respectively, one or more than one solution.

2 - DEFINITIONS AND PRELIMINARIES

If (X, τ) is a topological space we denote by $\overline{H}$ and $\text{int}(H)$ the closure and the interior of a non-empty set $H \subseteq X$. If E is a Banach space we denote by s and w the strong and the weak topology on E and by $d(y, C)$ the distance between $y \in E$ and $C \subseteq E$, that is defined by

$$d(y, C) = \inf_{x \in C} \|y - x\|.$$

The lower and the upper Kuratowski limits of a sets sequence $(H_n)_n$, $H_n \subseteq X$, are defined by:

$$\liminf_n H_n = \left\{ x \in X : \exists x_n \in H_n, n \in \mathbb{N}, \text{ with } \lim_n x_n = x \right\},$$

$$\limsup_n H_n = \left\{ x \in X : \exists (n_k)_k \uparrow +\infty, n_k \in \mathbb{N}, \exists x_{n_k} \in H_{n_k}, k \in \mathbb{N}, \text{ with } \lim_k x_{n_k} = x \right\}.$$

Definition 2.1. Let (X, τ) be a topological space. A set-valued map F from a set $H \subseteq X$ to a topological space (Y, σ) is called:

- σ -closed-valued if the set $F(x)$ is non-empty and σ -closed, for every $x \in X$;
- (τ, σ) -sequentially closed over H , (τ, σ) -closed for short, if for every $x \in H$ and every sequence $(x_n)_n$ τ -converging to x in H

$$\sigma\text{-}\limsup_n F(x_n) \subseteq F(x)$$

i.e. for every sequence $(y_n)_n$, such that $y_n \in F(x_n)$ for every $n \in \mathbb{N}$, σ -converging to a point y , one has $y \in F(x)$;

- (τ, σ) -sequentially lower semicontinuous over H , (τ, σ) -lower semicontinuous for short, if for every $x \in X$ and every sequence $(x_n)_n$ τ -converging to x in H

$$F(x) \subseteq \sigma\text{-}\liminf_n F(x_n)$$

i.e. for every $y \in F(x)$ there exists a sequence $(y_n)_n$ σ -converging to y such that $y_n \in F(x_n)$ for n sufficiently large;

- (τ, σ) -sequentially subcontinuous over H , (τ, σ) -subcontinuous for short, if for every $x \in H$, every sequence $(x_n)_n$ τ -converging to x in H , every sequence $(u_n)_n$ such that $u_n \in F(x_n)$, for every $n \in \mathbb{N}$, has a σ -convergent subsequence.

When (Y, σ) is a topological vector space F is called:

- convex-valued if the set $F(x)$ is non-empty and convex, for every $x \in X$.

Definition 2.2. Let V be a Banach space with dual V^* . An operator A from $K \subseteq V$ to V^* is called:

- hemicontinuous on K if it is continuous from every segment of K to V^* endowed with the weak topology;
- monotone on K if $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$ for every u and $v \in K$.

Definition 2.3. A sequence $(u_n)_n$ is called S -approximating for (Q) if:

- $u_n \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- there exists a sequence of positive real numbers $(\varepsilon_n)_n$, decreasing to 0 such that:

$$d(u_n, F(u_n)) \leq \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

and

$$\langle Au_n, u_n - v \rangle \leq \varepsilon_n \|u_n - v\| \quad \forall v \in F(u_n) \text{ and } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definition 2.4. A quasi-variational inequality (Q) is said to be S -well-posed if it has a unique solution $\bar{u}$ and every S -approximating sequence $(u_n)_n$ strongly converges to $\bar{u}$.

It is well known (see, for example (Dontchev-Zolezzi, 1993)) that whenever a function h is lower semicontinuous and bounded from below, the minimization problem

$$(P) \quad \min_{u \in V} h(u)$$

is well-posed if and only if

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam} M_\varepsilon = 0 \quad (1)$$

where, for a given positive real number ε ,

$$M_\varepsilon = \left\{ u \in V : h(u) \leq \inf_{v \in V} h(v) + \varepsilon \right\}$$

is the set of ε -minima of the function h .

In order to give a similar result for quasi-variational inequalities, in (Lignola-Morgan, 2000), in (Lignola, 2006) and subsequently in (Yu et al., 2007), (Ceng et al., 2008) and (Ceng-Yao, 2008), different concepts of approximate solutions for quasi-variational problems have been introduced. For instance, the set of approximate solutions considered in (Lignola, 2006) for quasi-variational inequalities and in (Lignola-Morgan, 2012a) for variational inequalities (i.e. when $F(u) = K$ for every u) is the following:

$$Q_\varepsilon = \{u \in K : d(u, F(u)) \leq \varepsilon \text{ and } \langle Au, u - v \rangle \leq \varepsilon \forall v \in F(u)\}. \quad (2)$$

Here, we consider the set

$$S_\varepsilon = \{u \in K : d(u, F(u)) \leq \varepsilon \text{ and } \langle Au, u - v \rangle \leq \varepsilon \|u - v\| \forall v \in F(u)\}$$

and we point out that

- if the SQVI (Q) has at least a solution, then $S_\varepsilon \neq \emptyset$;
- the set S_ε is a particular case of the set $\mathcal{T}_\varepsilon$ considered in (Lignola-Morgan, 2012) in the framework of stability of approximate solutions for quasi-variational problems;
- if the set-valued map F is constant and $F(u) = K$ for every $u \in K$, then (Q) is a variational inequality (VI) and S_ε amounts to the approximate solutions sets considered in (Lucchetti-Patrone, 1981);
- the set S_ε is closed under appropriate assumptions on F and A (see the proof of Proposition 4.1) but it may fail to be convex. Indeed, if $V = \mathbb{R}$, $K = [0, 1]$, $Au = 0$ and $F(u) = [0, u^2]$ for every $u \in K$, then it is easy to check that $S_\varepsilon = [0, (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2] \cup [(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2, 1]$ for every $\varepsilon \in]0, 1/4[$.

The following lemmas will be useful in the sequel.

Lemma 2.1 (Baiocchi-Capelo (1984)). *If the set-valued map F is convex-valued and closed-valued, the operator A is hemicontinuous on K , and $\bar{u}$ is a solution to the following problem*

$$(\tilde{Q}) \text{ find } \bar{u} \in K \text{ such that } \bar{u} \in F(\bar{u}) \text{ and } \langle Av, u - v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in F(\bar{u}),$$

then $\bar{u}$ solves the SQVI (Q) .

If the operator A is monotone on K and $\bar{u}$ is a solution to (Q) , then $\bar{u}$ also solves the problem $(\tilde{Q})$.

Lemma 2.2 (Lignola-Morgan (1994)). *Let $(H_n)_n$ be a sequence of non-empty subsets of the space V such that:*

- i) H_n is convex for every $n \in \mathbb{N}$;

ii) $H_0 \subseteq \liminf_n H_n$;

iii) there exists $m \in \mathbb{N}$ such that

$$\text{int} \left(\bigcap_{n \geq m} H_n \right) \neq \emptyset.$$

Then, for every $\bar{u} \in \text{int } H_0$ there exists a positive real number δ such that

$$B(\bar{u}, \delta) \subseteq H_n \quad \forall n \geq m,$$

where $B(\bar{u}, \delta)$ is the ball of radius δ around $\bar{u}$.

If V is a finite dimensional space, then assumption (iii) can be substituted by:

iii') $\text{int}(H_0) \neq \emptyset$.

3 - S-WELL-POSEDNESS

The first result is an equivalent condition for $\mathcal{S}$ -well-posedness in the spirit of condition (1).

Proposition 3.1. Assume that the following hold:

i) the set-valued map F is convex-valued, (s, w) -closed, (s, s) -lower semicontinuous and (s, w) -subcontinuous on K ;

ii) for every strongly converging sequence $(u_n)_n$, $u_n \in K$ for every $n \in \mathbb{N}$, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that

$$\text{int} \left(\bigcap_{n \geq m} F(u_n) \right) \neq \emptyset;$$

iii) the operator A is monotone and hemicontinuous on K .

Then (Q) is $\mathcal{S}$ -well-posed if and only if

$$S_\varepsilon \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } S_\varepsilon = 0. \quad (3)$$

Proof. Assume that (Q) is $\mathcal{S}$ -well-posed but there exists a positive number c such that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } S_\varepsilon > c$. Then, for every sequence $(\varepsilon_n)_n$ of positive real numbers decreasing to 0 there exist a sequence $(v_n)_n$ and a sequence $(u_n)_n$ such that

$$v_n \in S_{\varepsilon_n}, \quad u_n \in S_{\varepsilon_n} \quad \text{and} \quad \|v_n - u_n\| > c \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

The sequences $(v_n)_n$ and $(u_n)_n$ are $\mathcal{S}$ -approximating for (Q) , so they strongly converge to the unique solution $\bar{u}$ of (Q) and this contradicts (4).

Assume that $S_\varepsilon \neq \emptyset$ for every $\varepsilon > 0$ and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } S_\varepsilon = 0$. We consider a sequence $(\varepsilon_n)_n$ of positive real numbers decreasing to zero and a sequence $(u_n)_n$ which is $\mathcal{S}$ -approximating for (Q) , that is

$$u_n \in K, \quad d(u_n, F(u_n)) \leq \varepsilon_n \quad \text{and} \quad \langle Au_n, u_n - v \rangle \leq \varepsilon_n \|u_n - v\| \quad \forall v \in F(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Since $u_n \in \mathcal{S}_{\varepsilon_n}$ for every $n \in \mathbb{N}$ and condition (3) holds, the sequence $(u_n)_n$ is a Cauchy sequence and strongly converges to a point $\bar{u} \in K$. We prove that

$$d(\bar{u}, F(\bar{u})) \leq \liminf_n d(u_n, F(u_n)) \leq \lim_n \varepsilon_n = 0.$$

Indeed, if it is not true, there exists a positive number a such that:

$$\liminf_n d(u_n, F(u_n)) < a < d(\bar{u}, F(\bar{u})).$$

Then, there exists a subsequence $(u_{n_k})_k$ of $(u_n)_n$ and a sequence $(v_k)_k$ such that $v_k \in F(u_{n_k})$ and $\|u_{n_k} - v_k\| < a \ \forall k \in \mathbb{N}$. The set-valued map F being (s, w) -subcontinuous and (s, w) -closed, a subsequence of $(v_k)_k$, still denoted by $(v_k)_k$, weakly converges to a point $v \in S(\bar{u})$ and

$$a < d(\bar{u}, F(\bar{u})) \leq \|\bar{u} - v\| \leq \liminf_n \|u_{n_k} - v_k\| < a.$$

This is a contradiction, so $\bar{u} \in \overline{F(\bar{u})} = F(\bar{u})$.

In order to complete the proof, consider an arbitrary point $w \in F(\bar{u})$.

If $w \in \text{int}(F(\bar{u}))$, then $w \in F(u_n)$ for n sufficiently large by Lemma 2.2. Since the operator A is monotone and the sequence $(u_n)_n$ is $\mathcal{S}$ -approximating for (Q) , one has

$$\langle Aw, \bar{u} - w \rangle = \lim_n \langle Aw, u_n - w \rangle \leq \liminf_n \langle Au_n, u_n - w \rangle \leq \lim_n \varepsilon_n \|u_n - w\| = 0.$$

If $w \in F(\bar{u}) - \text{int}(F(\bar{u}))$, since F is convex-valued there exists a sequence $(w_n)_n$ whole contained in $\text{int}(F(\bar{u}))$ which strongly converges to w along a segment. Therefore, $w_n \in \text{int}(S(\bar{u}))$ and

$$\langle Aw_n, \bar{u} - w_n \rangle \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

The operator A being hemicontinuous, we also have that

$$\langle Aw, \bar{u} - w \rangle \leq 0$$

and $\bar{u}$ solves the problem $\tilde{Q}$ and also the quasi-variational inequality (Q) by Lemma 2.1. Moreover, $\bar{u}$ is the unique solution since $\bar{u} \in \mathcal{S}_\varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$ and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } \mathcal{S}_\varepsilon = 0$. $\square$

Remark 3.1. If the space V has finite dimension, as in Lemma 2.1 assumption *iii*) can be substituted by *iii')* for every $u \in K$, $\text{int}(F(u)) \neq \emptyset$.

Now, we present a result in which assumption *ii*) is dropped and the continuity assumption on the operator A is strengthened.

Proposition 3.2. *Assume that the following hold:*

- i) *the set-valued map F is convex-valued, (s, s) -lower semicontinuous, (s, w) -closed and (s, w) -subcontinuous on K ;*
 - ii) *the operator A is monotone and (s, w) -continuous on K .*
- Then (Q) is $\mathcal{S}$ -well-posed if and only if*

$$\mathcal{S}_\varepsilon \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0 \ \text{and} \ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } \mathcal{S}_\varepsilon = 0.$$

Proof. If $(u_n)_n$ is an $\mathcal{S}$ -approximating sequence for (Q) and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } \mathcal{S}_\varepsilon = 0$, one proves that $(u_n)_n$ strongly converges to a point $\bar{u} \in K$ which is a fixed point for the set-valued map F as proved in Proposition 3.1.

Since F is lower semicontinuous, for every $w \in F(\bar{u})$ there exists a sequence $(w_n)_n$ strongly converging to w such that $w_n \in F(u_n)$ for n sufficiently large. Then, being the operator A monotone and (s, w) -continuous, one has:

$$\langle Aw, \bar{u} - w \rangle = \lim_n \langle Aw_n, u_n - w_n \rangle \leq \liminf_n \langle Au_n, u_n - w_n \rangle \leq \lim_n \varepsilon_n \|u_n - w_n\| = 0$$

and the result follows from Lemma 2.1. The converse can be proved as in Proposition 3.1. $\square$

The following example shows that the concept of $\mathcal{S}$ -well-posedness and the concept of well-posedness introduced in (Lignola, 2006) may be not equivalent even in finite dimensional spaces.

Example 3.1. Let $E = \mathbb{R}$, $K = [0, +\infty[$, $Au = -e^{-u}$ and let F be defined by:

$$F(u) = \begin{cases} [u, 1] & \text{if } u \leq 1 \\ [1, 2u - 1] & \text{if } u > 1 \end{cases}$$

In (Lignola, 2006), it has been shown that $\bar{u} = 1$ is the unique solution to (Q) and that for every $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q}_\varepsilon = \{u \in [0, 1] : e^{-u}(1 - u) \leq \varepsilon\} \cup \{u \in]1, +\infty[: e^{-u}(u - 1) \leq \varepsilon\},$$

so that (Q) is not well-posed since the positively diverging sequences are approximating for (Q) . However, one easily checks that $\mathcal{S}_\varepsilon = \{1\}$ for every $\varepsilon > 0$ so (Q) is trivially $\mathcal{S}$ -well-posed.

Nevertheless, the following result shows that whenever V is a finite dimensional space and the set K is compact, then well-posedness and $\mathcal{S}$ -well-posedness are equivalent concepts.

Proposition 3.3. Assume that $V = \mathbb{R}^h$ and K is a non-empty, compact and convex subset of V . If the following hold:

- i) the set-valued map F is convex-valued, closed and lower semicontinuous on K ;
 - ii) for every $u \in K$, $\text{int}(F(u)) \neq \emptyset$;
 - iii) the function A is monotone and hemicontinuous on K ;
- then (Q) is well-posed if and only if it is $\mathcal{S}$ -well-posed.

Proof. Assume that (Q) is well-posed and let $\bar{u}$ be the unique solution to (Q) . If $(u_n)_n$ is an $\mathcal{S}$ -approximating sequence, there exists a sequence $(\varepsilon_n)_n$ decreasing to 0 such that $u_n \in \mathcal{S}_{\varepsilon_n}$ for every $n \in \mathbb{N}$, that is

$$d(u_n, F(u_n)) \leq \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

and

$$\langle Au_n, u_n - v \rangle \leq \varepsilon_n \|u_n - v\| \quad \forall v \in F(u_n) \text{ and } \forall n \in \mathbb{N}.$$

The set K is compact, so $\text{diam } K = d < +\infty$. Therefore, $u_n \in Q_{d\varepsilon_n}$ for every $n \in \mathbb{N}$ (see (2) in Section 3)) and the sequence $(u_n)_n$ converges to $\bar{u}$ since (Q) is well-posed and Theorem 3.1 in (Lignola, 2006) holds.

Now, assume that (Q) is $\mathcal{S}$ -well-posed and let $\bar{u}$ be the unique solution to (Q) . If $(u_n)_n$ is an approximating sequence, there exists a subsequence $(u_{n_k})_k$ of $(u_n)_n$ converging to a point $u \in K$. One can prove that u is a fixed point for F and that

$$\langle Aw, u - w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in F(u)$$

with similar arguments as in the proof of Proposition 3.1.

Then, Lemma 2.1 implies that u is a solution to (Q) , so $u = \bar{u}$ and the whole sequence $(u_n)_n$ has to converge to $\bar{u}$ (see, for example, (Dontchev-Zolezzi, 1993)). $\square$

Finally, we observe that whenever F is constant and $F(u) = K$ for every $u \in K$, then (Q) is a variational inequality (VI) and Proposition 3.1 implies that (VI) is $\mathcal{S}$ -well-posed if and only if (VI) is well-posed in the sense of Lucchetti and Patrone (see (Lucchetti-Patrone, 1981) or (Dontchev-Zolezzi, 1993)).

4 - $\mathcal{S}$ -WELL-POSEDNESS IN GENERALIZED SENSE

First, we recall the basic concepts that will be used in this section.

Definition 4.1 (Kuratowski (1968)). The Kuratowski measure of non-compactness μ of a non-empty subset H of a metric space (X, d) is

$$\mu(H) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : H \subseteq \bigcup_{i=1}^n H_i, \text{diam } H_i < \varepsilon \text{ } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Definition 4.2 (Kuratowski (1968)). The Hausdorff distance between two non-empty bounded subsets H and K of a metric space (X, d) is:

$$h(H, K) = \max \left\{ \sup_{u \in H} d(u, K), \sup_{w \in K} d(H, w) \right\}.$$

Definition 4.3. The Stampacchia type quasi-variational inequality (Q) is *strongly (resp. weakly) $\mathcal{S}$ -well-posed in generalized sense* if it has at least a solution and every $\mathcal{S}$ -approximating sequence $(u_n)_n$ has a subsequence which strongly (resp. weakly) converges to a solution of (Q) .

Proposition 4.1. Assume that the following hold:

- i) the set-valued map F is convex-valued, (s, w) -closed, (s, s) -lower semicontinuous and (s, w) -subcontinuous on K ;
 - ii) the operator A is (s, w) -continuous on K .
- Then, (Q) is strongly $\mathcal{S}$ -well-posed in generalized sense if and only if

$$S_\varepsilon \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(S_\varepsilon) = 0.$$

Proof. Assume that

$$S_\varepsilon \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(S_\varepsilon) = 0.$$

First, we prove that the set S_ε is strongly closed for every positive real number ε . Consider $u_n \in S_\varepsilon$ for every $n \in \mathbb{N}$ and assume that the sequence $(u_n)_n$ strongly converges to $u \in K$. One can prove that $d(u, F(u)) \leq \varepsilon$ with similar arguments as in the proof of Proposition 3.1. Since F is (s, s) -lower semicontinuous, for every $v \in F(u)$ there exists a sequence $(v_n)_n$ strongly converging to v such that $v_n \in F(u_n)$ for n sufficiently large. Therefore one gets

$$\langle Au_n, u_n - v_n \rangle \leq \varepsilon \|u_n - v_n\|$$

for n sufficiently large.

The operator A being (s, w) -continuous on K , one has

$$\langle Au, u - v \rangle = \lim_n \langle Au_n, u_n - v_n \rangle \leq \varepsilon \|u - v\|$$

and $u \in S_\varepsilon$.

Since the set Q of the solutions to (Q) satisfies the following equality

$$Q = \bigcap_{\varepsilon > 0} S_\varepsilon$$

and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(S_\varepsilon) = 0$, the set Q is non-empty and compact and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(S_\varepsilon, Q) = 0$ due to the theorem in (Kuratowski, 1968) p. 412. Therefore, if $(u_n)_n$ is an S -approximating sequence for (Q) , i.e. $u_n \in S_{\varepsilon_n}$ for every $n \in \mathbb{N}$ where $(\varepsilon_n)_n$ is a sequence of positive real numbers decreasing to 0, one has

$$\lim_n d(u_n, Q) \leq \lim_n h(S_{\varepsilon_n}, Q) = 0.$$

Since Q is compact, there exists a sequence $(w_n)_n$ such that:

$$w_n \in Q \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \lim_n \|w_n - u_n\| = \lim_n d(u_n, Q) = 0.$$

The sequence $(w_n)_n$ has a subsequence converging to a point in Q and the same occurs for the sequence $(u_n)_n$, so (Q) is S -well-posed in generalized sense.

Conversely, if (Q) is well-posed in generalized sense, then the set Q is non-empty and sequentially compact. Since $Q \subseteq S_\varepsilon$ for every positive real number ε , one has

$$S_\varepsilon \neq \emptyset \quad \text{and} \quad h(S_\varepsilon, Q) = \max \left\{ \sup_{u \in S_\varepsilon} d(u, Q), \sup_{v \in Q} d(S_\varepsilon, v) \right\} = \sup_{u \in S_\varepsilon} d(u, Q)$$

and consequently (see, for example (Dontchev-Zolezzi, 1993))

$$\mu(S_\varepsilon) \leq 2h(S_\varepsilon, Q) + \mu(Q) = 2h(S_\varepsilon, Q) = 2 \sup_{u \in S_\varepsilon} d(u, Q).$$

Then, in order to prove that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(S_\varepsilon) = 0$, it is sufficient to prove that

$$\lim_n \sup_{u \in S_{\varepsilon_n}} d(u, Q) = 0 \tag{5}$$

for every sequence $(\varepsilon_n)_n$ of positive real numbers decreasing to 0. Assume that (5) is not true. Then, there exist $c > 0$ and a sequence $(u_n)_n$, such that $u_n \in S_{\varepsilon_n}$ and $d(u_n, Q) > c$ for n sufficiently large. However, the sequence $(u_n)_n$ is S -approximating for (Q) and a subsequence $(u_{n_k})_k$ has to strongly converge towards $u \in Q$, and one has a contradiction. $\square$

The following sufficient conditions for S -well-posedness in generalized sense follow from analogous results in (Lignola, 2006).

Proposition 4.2. *Assume that V is a reflexive Banach space and that the following hold:*

- i) *the set K is bounded;*
- ii) *the set-valued map F is convex-valued, (w, w) -closed and (w, s) -lower semicontinuous on K ;*
- iii) *the operator A is (s, s) -continuous and monotone on K .*

Then, (Q) is weakly S -well-posed in generalized sense.

Proof. It is sufficient to observe that assumption i) implies that $S_\varepsilon \subseteq Q_{d\varepsilon}$ for every $\varepsilon > 0$, where $d = \text{diam } K$. Then, by theorems 4.3 and 4.1 in (Lignola, 2006) (Q) is well-posed in generalized sense and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(S_\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(Q_{d\varepsilon}) = 0$. $\square$

The above assumptions are quite restrictive in infinite dimensional spaces, so we also present two sufficient conditions for S -well-posedness in finite dimensional spaces.

Proposition 4.3. *Assume that $V = \mathbb{R}^k$ and that the set K is compact. If the following hold:*

- i) *the set-valued map F is convex-valued, closed, and lower semicontinuous on K ;*
- ii) *the function A is continuous and monotone on K ;*

then, (Q) is S -well-posed in generalized sense.

As in Proposition 3.2 we can weaken the continuity assumption on A if we assume that $F(u)$ has non-empty interior for every $u \in K$. Namely, we have:

Proposition 4.4. *Assume that $V = \mathbb{R}^k$ and the set K is compact. If the following hold:*

- i) *the set-valued map F is convex-valued, closed, and lower semicontinuous on K ;*
- ii) *for every $u \in K$ $\text{int}(F(u)) \neq \emptyset$;*
- iii) *the function A is hemicontinuous and monotone on K ;*

then, (Q) is S -well-posed in generalized sense.

References

- Antipin, A.S., Jacimovic, M. and Mijailovic, N. (2011) *A Second-order Continuous Method for Solving Quasi-variational Inequalities*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **51**, 1856-1863.
- Aubin, J.P. (1979) *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland, Amsterdam.
- Aubin, J.P. and Frankowska, A. (1990) *Set-valued Analysis*, Birkhauser Boston, Boston.
- Bensoussan, A. and Lions, J.L. (1973) *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi-Variationnelles d'Evolution*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **276**, 1333-1338.

- Baiocchi, C. and Capelo, A. (1984) *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems*, John Wiley and Sons, New York, NY.
- Barrett, J.W. and Prigozhin, L. (2010) *A Quasi-variational Inequality Problem in Superconductivity*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **20**, 679-706.
- Barrett, J.W. and Prigozhin, L. (2013) *A Quasi-variational Inequality Problem Arising in the Modeling of Growing Sandpiles*, ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **47**, 1133-1165.
- Ceng, L.C., Hadjisavvas, N., Schaible, S. and Yao, J.C. (2008) *Well-Posedness for Mixed Quasivariational-Like Inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, **139**, 109-125.
- Ceng, L.C. and Yao, J.C. (2008) *Well-posedness of Generalized Mixed variational Inequalities, Inclusion Problems and Fixed-point Problems*, Nonlinear Anal., **69**, 4585-4603.
- Dontchev, A.L. and Zolezzi, T. (1993) *Well-Posed Optimization Problems*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. **1543**, Springer Verlag, Berlin.
- Fukushima, M. and Pang, J.S. (2005) *Quasi-variational Inequalities, Generalized Nash Equilibria, and Multi-leader-follower Games*, Comput. Manag. Sci., **2**, 21-56.
- Harker, P.T. and Pang, J.S. (1990) *Finite-Dimensional Variational Inequality and Non-linear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications*, Mathematical Programming, **48**, 161-220.
- Kočvara, M. and Outrata, J. (1995) *On a Class of Quasivariational Inequalities*, Optimization Methods and Software, **5**, 275-295.
- Kuratowski, K. (1968) *Topology*, Vol. 1 and 2, Academic Press, New York.
- Lignola, M.B. (2006) *Well-Posedness and L-Well-Posedness for Quasi-Variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, **128**, 119-138.
- Lignola, M.B. and Morgan J. (1994) *Semicontinuity and Episemicontinuity: Equivalence and Applications*, Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, **8-B**, 1-16.
- Lignola, M.B. and Morgan, J. (1997) *Convergence of Solutions of Quasi-variational Inequalities and Applications*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **10**, 375-385.
- Lignola, M.B. and Morgan, J. (2000) *Well-Posedness for Optimization Problems with Constraints Defined by a Variational Inequality Having a Unique Solution*, Journal of Global Optimization, **16**, 57-67.
- Lignola, M. B. and Morgan, J. (2006) *Vector Quasi-variational Inequalities: Approximate Solutions and Well-posedness*, J. Convex Anal., **13**, 373-384.
- Lignola, M.B. and Morgan, J. (2012) *Stability in Regularized Quasi-Variational Settings*, Journal of Convex Anal., **19**, 1091-1107.
- Lignola, M.B. and Morgan, J. (2012) *Approximate Values for Mathematical Programs with Variational Inequality Constraints*, Comput. Optim. Appl., **53**, 485-503.
- Lucchetti, R. and Patrone, F. (1981) *A characterization of Tykhonov Well-Posedness for Minimum Problems, with Applications to Variational Inequalities*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **3**, 461-476.
- Morgan, J. and Prieur, F. (2013) *Global Emission Ceiling Versus International Cap and Trade: What is the Most Efficient System to Solve the Climate Change Issue?*, Environmental Modeling and Assessment, **18**, 493-508.
- Morgan, J. and Romaniello, M., (2003), *Generalized Quasivariational Inequalities and*

- Duality*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, **4**, 32-38.
- Mosco, U. (1976) *Implicit Variational Problems and Quasivariational Inequalities*, Summer School, Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, Bruxelles, Belgium, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **543**, Springer Verlag, Berlin, 83-156.
- Noor, M.A. and Memon, Z.A. (2002) *Algorithms for General Mixed Quasivariational Inequalities*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, **3**, 1-9.
- Yu, J., Yang H. and Yu C., (2007) *Well-posed Ky Fans Point, Quasi-variational Inequality and Nash Equilibrium Problems*, Nonlinear Analysis, **66**, 777-790.

A note on the asymptotic behaviour of large solutions and their gradient in a ball

Nota di Ester Giarrusso¹

Presentata dal socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 4 aprile 2014)

Key words: large solutions, nonlinear elliptic equations

Abstract - In this note we discuss the asymptotic behaviour of a spherically symmetric large solution of the quasilinear equation $\Delta u - |Du|^q = f(u)$ in a ball. Such a solution positively diverges as x approaches the boundary. We assume $1 < q < 2$ and $\limsup_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} < \infty$. We extend some results contained in (Bandle-Giarrusso, 1996) and (Giarrusso, 2000a).

1 - INTRODUCTION

Let Ω be a bounded domain in R^n , which verifies an inner and outer sphere condition. Elliptic problems of the following type

$$\Delta u - |Du|^q = f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(x) \rightarrow \infty \quad \text{as } x \rightarrow \partial\Omega \quad (1.2)$$

$0 < q < 2$, have been lately studied by many authors from different points of view and also for more general operators (Bandle, 2003; Bandle-Giarrusso, 1996; Bandle et al., 2010; Bandle-Porru, 1994; Ferone et al., 2010; Giarrusso, 2000a,b; Lazer-McKenna, 1994; Marras-Porru, 2011; Zhang, 2013). In the following, we mostly cite the results employed below. A solution of (1.1)-(1.2) is called *large solution*, since it is bigger than any solution bounded on $\partial\Omega$. Throughout this paper we assume that $f(u) \in C^1(I)$, where I is the interval $[\tau, +\infty]$ or the real space R and that:

F) $f(u)$ and $f'(u)$ are positive in $\overset{o}{I}$, moreover $\lim_{u \rightarrow \inf I} f(u) = 0$ and $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty$.

¹Università di Napoli Federico II, Via Cintia, 80126 Napoli, Italy. E-mail: ester.giarrusso@unina.it

A sufficient condition for existence of *large solution* of (1.1) is either $q > 1$ or $\int_0^\infty 1/\sqrt{F(t)}dt < \infty$, $F(u) = \int_\gamma^u f(s)ds$ for $u \geq \gamma \in I$, (see (Bandle-Giarrusso, 1996)). Furthermore in (Bandle-Giarrusso, 1996) the exact asymptotic behaviour of a *large solution* was studied when either $f/F^{q/2} \rightarrow 0$ or $f/F^{q/2} \rightarrow \infty$, as $u \rightarrow \infty$, and, lately, when $f/F^{q/2} \rightarrow l > 0$, as $u \rightarrow \infty$, in (Giarrusso, 2000a). Herein we discuss the asymptotic behaviour of a radial *large solution* of problem (1.1)-(1.2) in a ball B under the condition on the nonlinearity f that $\limsup_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} < \infty$. We take $1 < q < 2$. This is not a restriction. In fact if $\int_0^\infty 1/\sqrt{F(t)}dt < \infty$, then $f(u)/u \rightarrow \infty$, as $u \rightarrow \infty$ (see (Bandle-Marcus, 1995)), and so, since $F(u) \leq (u - \gamma)f(u)$, we have: $f/F^{q/2} \geq f^{1-q} \left(\frac{f}{u-\gamma} \right)^{q/2}$, which, for $q \leq 1$, implies $f/F^{q/2} \rightarrow \infty$, as $u \rightarrow \infty$ and this case has been already discussed in (Bandle-Giarrusso, 1996). Moreover, it turns out that condition $f/F^{q/2} \rightarrow \infty$, as $u \rightarrow \infty$, is equivalent to $f(u)u^{q/(q-2)} \rightarrow \infty$ (see the remarks below), which is, of course, in contrast with the assumption that $\limsup_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} < \infty$. Finally, this assumption is quite general, so we cannot obtain an exact asymptotic behaviour of u and $|Du|$, but we prove that we can control it from below and from above by two functions, which depend on the data.

2 - ASYMPTOTIC BEHAVIOUR

Let B be a ball of radius R . A radial large solution $u(r)$ of (1.1) in B satisfies the o.d.e.:

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) - |u'(r)|^q = f(u) \quad (2.1)$$

with $u'(0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow R} u(r) = \infty$. Now set

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} = l_1 \quad \text{and} \quad \limsup_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} = l_2$$

and set for $a \geq 0$

$$G(a) = \frac{a}{2-q} - (a)^{q/2}$$

Of course $G(a) = 0$ for $a = 0$ and for $a = (2-q)^{2/(2-q)}$. Now we have:

Theorem 2.1. *Let $a_i, i=1,2$ be the positive solution of the equation*

$$G(a) = l_i \quad i = 1, 2$$

then if $l_2 < \infty$ we obtain:

$$\liminf_{r \rightarrow R} u(r) (R-r)^{(2-q)/(q-1)} \geq \left(\frac{2-q}{(q-1)\sqrt{a_2}} \right)^{(2-q)/(q-1)} \quad (2.2)$$

moreover if $l_1 < \infty$, we obtain:

$$\limsup_{r \rightarrow R} u(r) (R-r)^{(2-q)/(q-1)} \leq \left(\frac{2-q}{(q-1)\sqrt{a_1}} \right)^{(2-q)/(q-1)}. \quad (2.3)$$

Proof. The functions u , u' and u'' are positive close to R , say for $r > \bar{r}$ and $u'(R) = \infty$. Denoted by $r(u)$ the inverse function of $u(r)$ in $[\bar{r}, R]$ and set $v(u) = u'^2(r(u))$ for $u > \bar{u} = u(\bar{r})$ it is clear that for $u \geq \bar{u}$

$$v'(u) + \frac{2(n-1)}{r(u)} \sqrt{v(u)} - 2 \left(\sqrt{v(u)} \right)^q = 2f(u). \quad (2.4)$$

Now, if $l_2 < \infty$, fixed $\epsilon > 0$ there exists $u_\epsilon > \bar{u}$ such that for $u \geq u_\epsilon$

$$v'(u) - 2 \left(\sqrt{v(u)} \right)^q < 2(l_2 + \epsilon) u^{q/(2-q)}. \quad (2.5)$$

Hence comparing $v(u)$ with the solution z_ϵ of the equation

$$z'(u) - 2 \left(\sqrt{z(u)} \right)^q = 2(l_2 + \epsilon) u^{q/(2-q)}$$

which satisfies the condition $z(u_\epsilon) = v(u_\epsilon)$, we obtain for $u \geq u_\epsilon$

$$v(u) \leq z_\epsilon(u)$$

because $v(u) - z_\epsilon(u)$ is negative to the right of u_ϵ and since it cannot have a negative minimum for $u \geq u_\epsilon$, stays negative. Therefore

$$\frac{v(u)}{u^{2/(2-q)}} \leq \frac{z_\epsilon(u)}{u^{2/(2-q)}}. \quad (2.6)$$

Since in (Giarrusso, 2000a) it was proved that $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{z_\epsilon(u)}{u^{2/(2-q)}} = a_{2\epsilon}$, where $a_{2\epsilon}$ satisfies the equation $G(a_{2\epsilon}) = l_2 + \epsilon$, from (2.6) we derive

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} v(u) u^{2/(q-2)} \leq a_{2\epsilon} \quad (2.7)$$

and letting $\epsilon \rightarrow 0$, we get

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} v(u) u^{2/(q-2)} \leq a_2. \quad (2.8)$$

Now we recall the definition of $v(u)$ to obtain, from the previous inequality, for $\epsilon_1 > 0$ and $r > r_1$

$$u'(r) u^{1/(q-2)} < \sqrt{a_2 + \epsilon_1}. \quad (2.9)$$

Hence by integrating between r and R we see that

$$\frac{u^{(1-q)/(2-q)}}{R-r} < \left(\frac{q-1}{2-q} \right) \sqrt{a_2 + \epsilon_1},$$

which, in turn, implies (2.2).

Assume now $0 < l_1 < \infty$. Then, fixed a small $\epsilon > 0$, for large values of u , $f(u) > (l_1 - \epsilon) u^{q/(2-q)}$, and so,

$$v' > 2(l_1 - \epsilon) u^{q/(2-q)} + 2(\sqrt{v})^q \left[1 - \frac{n-1}{r(u)} \left(\sqrt{v(u)} \right)^{1-q} \right]$$

hence, since $v^{\frac{1-q}{2}} \rightarrow 0$, as $u \rightarrow \infty$, there exists $u_{0\epsilon}$ such that, for $u \geq u_{0\epsilon}$, we have:

$$v' - 2(1 - \epsilon)(\sqrt{v})^q > 2(l_1 - \epsilon)u^{q/(2-q)}.$$

By comparison $v(u) \geq w_\epsilon(u)$, for $u \geq u_{0\epsilon}$, where w_ϵ satisfies $w_\epsilon(u_{0\epsilon}) = v(u_{0\epsilon})$ and

$$w' - 2(1 - \epsilon)(\sqrt{w})^q = 2(l_1 - \epsilon)u^{q/(2-q)}.$$

Then $\liminf_{u \rightarrow \infty} v(u)u^{2/(q-2)} \geq \lim_{u \rightarrow \infty} w_\epsilon u^{2/(2-q)} = a_{1\epsilon}$, where (see (Giarrusso, 2000a))

$$\frac{a_{1\epsilon}}{2-q} - (1 - \epsilon)(a_{1\epsilon})^{q/2} = l_1 - \epsilon$$

Analogously as in (2.8) we let $\epsilon \rightarrow 0$ to obtain

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} v(u)u^{2/(q-2)} \geq a_1. \quad (2.10)$$

From (2.10), we get (2.3) by analogous calculation to obtain (2.2) from (2.8).

Now suppose $l_1 = 0$. By (2.4), fixed $0 < \epsilon < 1$ we have for $u > u_{0\epsilon}$

$$\frac{v'(u)}{v^{q/2}} \geq 2(1 - \epsilon),$$

which implies, by integration between $u_{0\epsilon}$ and u

$$v(u)u^{2/(q-2)} \geq u^{2/(q-2)} [(2-q)(1 - \epsilon)(u - u_{0\epsilon})]^{2/(2-q)}$$

and so

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} v(u)u^{2/(q-2)} \geq (2-q)^{2/(2-q)}. \quad (2.11)$$

Then again we obtain (2.3). $\square$

Of course inequality (2.11) still holds when $l_1 > 0$, but in this case it does not improve (2.3).

In the following theorem an asymptotic behaviour of $|Du|$ is shown. Indeed we have:

Theorem 2.2. Assume $l_2 < \infty$. Then the following inequality holds:

$$\sqrt{a_1} \left[\frac{2-q}{(q-1)\sqrt{a_2}} \right]^{1/(q-1)} \leq \liminf_{r \rightarrow R} u'(r)(R-r)^{1/(q-1)} \quad (2.12)$$

and

$$\limsup_{r \rightarrow R} u'(r)(R-r)^{1/(q-1)} \leq \sqrt{a_2} \left[\frac{2-q}{(q-1)\sqrt{a_1}} \right]^{1/(q-1)}. \quad (2.13)$$

Proof. From (2.8) and (2.10) we derive

$$a_1 \leq \liminf_{u \rightarrow \infty} v(u)u^{2/(q-2)} \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} v(u)u^{2/(q-2)} \leq a_2, \quad (2.14)$$

hence, by definition of $v(u)$, fixed a small $\epsilon > 0$, for $r > r_\epsilon$ it results

$$u^{1/(2-q)} \sqrt{a_1 - \epsilon} < u' < u^{1/(2-q)} \sqrt{a_2 + \epsilon},$$

which implies

$$(R-r)^{1/(q-1)} u^{1/(2-q)} \sqrt{a_1 - \epsilon} < u'(R-r)^{1/(q-1)} < (R-r)^{1/(q-1)} u^{1/(2-q)} \sqrt{a_2 + \epsilon}.$$

From the above we obtain (2.12) and (2.13) because of (2.2) and (2.3). $\square$

Remark 2.3. If $l_2 = 0$, then $a_1 = a_2 = (2-q)^{2/(2-q)}$, hence we obtain by (2.2) and (2.3)

$$\lim_{r \rightarrow R} u(r)(R-r)^{(2-q)/(q-1)} = \frac{1}{2-q} \left(\frac{1}{q-1} \right)^{(2-q)/(q-1)}. \quad (2.15)$$

This result was already obtained in (Bandle-Giarrusso, 1996) under the assumption $f/F^{q/2} \rightarrow 0$, as $u \rightarrow \infty$. Analogously if $l_1 = l_2 = l$ is a positive number we derive from (2.2), and (2.3), with $G(a) = l$,

$$\lim_{r \rightarrow R} u(r)(R-r)^{(2-q)/(q-1)} = \left(\frac{2-q}{(q-1)\sqrt{a}} \right)^{(2-q)/(q-1)} \quad (2.16)$$

as proved in (Giarrusso, 2000a); moreover, from (2.12) and (2.13) we have for $l_1 = l_2$

$$\lim_{r \rightarrow R} u'(r) \left[\frac{(q-1)}{2-q} (R-r) \right]^{1/(q-1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^{(2-q)/(q-1)}$$

Finally, notice that the solution $a(l)$ of $G(a) = l$ is an increasing function of $l \in [0, \infty[$, which positively diverges as $l \rightarrow \infty$.

Remark 2.4. In (Bandle-Giarrusso, 1996; Giarrusso, 2000a) the asymptotic behaviour of a large solution of (1.1) was discussed under the assumption of the regularity of the ratio $f(u)/F^{q/2}$. Now notice that

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^{q/(2-q)}} = \infty \iff \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{F^{q/2}} = \infty \quad (2.17)$$

moreover

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^{q/(2-q)}} = l \in]0, \infty[\iff \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{F^{q/2}} = L = \left(\frac{2}{2-q} \right)^{q/2} l^{(2-q)/2} \quad (2.18)$$

and

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{F^{q/2}} = 0 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^{q/(2-q)}} = 0, \quad (2.19)$$

as well as, if $f(u)/F^{q/2}$ is regular at ∞ ,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^{q/(2-q)}} = 0 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{F^{q/2}} = 0 \quad (2.20)$$

Proof. Since $f(u)$ increases

$$F(u) = \int_{\gamma}^u f(s) ds \leq f(u)(u - \gamma), \quad u \geq \gamma, \quad (2.21)$$

then for large values of u

$$\frac{f(u)}{u^{q/(2-q)}} \leq \left(\frac{u - \gamma}{u} \right)^{q/(2-q)} \left(\frac{f(u)}{F^{q/2}} \right)^{2/(2-q)}. \quad (2.22)$$

From this inequality we derive that

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} = \infty \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} f(u)/F^{q/2} = \infty.$$

Suppose, now, $f(u)/F^{q/2} \rightarrow \infty$, as $u \rightarrow \infty$, then by the rule of Bernoulli-L'Hospital also $\lim_{u \rightarrow \infty} F^{(2-q)/2}/u = \infty$, which implies

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} = \infty,$$

again by (2.21). Hence (2.17) is satisfied.

Analogously if $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)/F^{q/2} = L$, then

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{F^{(2-q)/2}}{u} = \frac{2-q}{2}L,$$

hence $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} = l$.

Assume, now, $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)u^{q/(q-2)} = l$, then, again by the rule of Bernoulli-L'Hospital, we get

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F(u)/u^{2/(2-q)} = \frac{2-q}{2}l,$$

which implies $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)/F^{q/2} = L$ and, so, (2.18) is true. Furthermore from (2.22), (2.17), (2.18), we obtain (2.19), (2.20). $\square$

ACKNOWLEDGEMENT

The author is member of the Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) of the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM).

References

- C. Bandle, *Asymptotic behaviour of large solutions of quasilinear elliptic problems*, Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik. ZAMP. Journal of Applied Mathematics and Physics. Journal de Mathematiques et de Physique Appliquees, **54** (2003), 731–738. Special issue dedicated to Lawrence E. Payne.
- C. Bandle and E. Giarrusso, *Boundary blow up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms*, Advances in Differential Equations, **1** (1996), 133–150.
- C. Bandle and M. Marcus, *Asymptotic behaviour of solutions and their derivatives, for semilinear elliptic problems with blowup on the boundary*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Lineaire, **12** (1995), 155–171.
- C. Bandle, V. Moroz and W. Reichel, *Large solutions to semilinear elliptic equations with Hardy potential and exponential nonlinearity*, in Around the research of Vladimir Maz'ya. II, Int. Math. Ser. (N. Y.), **12**, 1–22, Springer, New York 2010.
- C. Bandle and G. Porru, *Asymptotic behaviour and convexity of large solutions to nonlinear equations*, in Inequalities and applications, World Sci. Ser. Appl. Anal., **3**, 59–71, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.
- V. Ferone, E. Giarrusso, B. Messano and M. R. Posteraro, *Estimates for blow-up solutions to nonlinear elliptic equations with p -growth in the gradient*, Zeitschrift fuer Analysis und ihre Anwendungen. Journal of Analysis and its Applications, **29** (2010), 219–234.
- E. Giarrusso, *Asymptotic behaviour of large solutions of an elliptic quasilinear equation in a borderline case*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie I. Mathematique, **331** (2000a), 777–782.
- E. Giarrusso, *On blow up solutions of a quasilinear elliptic equation*, Mathematische Nachrichten, **213** (2000b), 89–104.
- A. C. Lazer and P. J. McKenna, *Asymptotic behavior of solutions of boundary blowup problems*, Differential and Integral Equations. An International Journal for Theory and Applications, **7** (1994), 1001–1019.
- M. Marras and G. Porru, *Estimates and uniqueness for boundary blow-up solutions of p -Laplace equations*, Electronic Journal of Differential Equations, **2011** (2011) No. 119, 1–10 pp.
- Z. Zhang *Large solutions of semilinear elliptic equations with a gradient term: existence and boundary behavior*, Communications on Pure and Applied Analysis, **12** (2013), 1381–1392.

Beyond Feynman's troubles in Electromagnetics

Nota del socio Giovanni Romano¹

(Presentata nell'Adunanza del 4 aprile, 2014)

Key words: Electromagnetic fields, differential forms, balance laws, flux rule, Lorentz force law.

Abstract - New basic principles of electric and magnetic induction are formulated as balance laws referring to material paths undergoing piecewise discontinuous motions. The resulting differential rules are able to overcome difficulties of standard formulations and to provide a direct interpretation to experimental evidences involving induction phenomena whose description in terms of flux rules is troublesome or unfeasible. FARADAY-HENRY-NEUMANN-FELICI and AMPÈRE-MAXWELL flux laws of electromagnetic induction are recovered in the special case of closed material circuits undergoing regular motions. For an electric charge translating into a uniform magnetic field due to a constant magnetic potential, a term analogous to LORENTZ force is found to hold, but with a correction factor of one-half.

Riassunto - Principi di bilancio che governano i fenomeni di induzione elettrica e magnetica sono formulati con riferimento a linee materiali in moto, anche discontinuo a pezzi. Le conseguenti regole differenziali sono suscettibili di interpretare in modo diretto le evidenze sperimentali anche quando le formulazioni standard risultano di problematica o impossibile applicazione. Le leggi di flusso, come enunciate in letteratura, sono ritrovate come caso particolare per circuiti materiali chiusi in moto non discontinuo. Per cariche elettriche in moto traslatorio in un campo magnetico uniforme dovuto ad un potenziale magnetico costante, si ritrova la cosiddetta legge di forza di LORENTZ, ma corretta da un fattore un mezzo.

¹Department of Structures, University of Naples Federico II, via Claudio 21, 80125 - Naples, Italy. e-mail: romano@unina.it

1. PROLEGOMENA

History of electromagnetism is really fascinating. Starting from the many brilliant experimental discoveries and interpretations by ROMAGNOSI, ØRSTED, BIOT, SAVART, AMPÈRE in 1800-1820, and ZANTEDESCHI-HENRY-FARADAY-NEUMANN-LENZ-WEBER-FELICI in between 1829 and 1855, early beautiful theoretical abstractions soon led to the formulation of GAUSS-FARADAY's and AMPÈRE-MAXWELL laws of electromagnetic induction.

It is however to be said that, in looking at modern treatments of the fundamentals of electromagnetism, a careful reader would certainly agree with R.P. FEYNMAN [15, II.17-1] in being disappointed by the contamination of the synthetic and powerful original principles with *ad hoc* additional rules aimed at interpreting the role of body motion in induction phenomena.

It seems that troubles became to appear in the scientific literature as far as the analysis conceived by J. CLERK-MAXWELL in [8] was subjected to simplifications proposed, around the end of the nineteenth century, by HEAVISIDE, HERTZ and LORENTZ [19, 24, 29, 30, 31, 32].

Unfortunately these modifications were performed with a lack of attention to the original theoretical framework set up by MAXWELL [8, 9, 10] and by H. VON HELMHOLTZ [20, 21, 22, 23].

The main negative feature consisted in the way motions of material particles were taken into account. In fact they were either completely ignored, as feasible only in getting the wave equations *in vacuo*, or adjusted by adding *ad hoc* terms in the case of simple relative translations, with the consequence that invariance under frame transformations was lost.

According to a prevailing opinion [11], the treatments by HEAVISIDE and HERTZ improved MAXWELL analysis by taking care of particle motion. A reading of the original papers by MAXWELL [8, 9] and by J.J. THOMSON [50] is however sufficient to completely disprove such statements and to put into evidence the power of the original formulation.

Another peculiar occurrence was the appearance of vector calculus which, introduced by GIBBS in 1888, was soon adopted to simplify the previous analysis based on the quaternion algebra, and, published in extended form in [16], rapidly became the standard formalism in physics and engineering of the twentieth century.

Unfortunately, with the vector symbolism, physical entities were deprived of their proper geometrical nature and flattened on a common algebraic platform.

The advent of the relativistic era was of no advantage in revising the flaws introduced in the theory of electromagnetics by the cited simplifications.

On the contrary, under the influence of the 1905 paper by EINSTEIN [14], the attempts of recovering frame invariance of MAXWELL-HERTZ laws of induction, led to sustain that EUCLID frame transformations ought to be substituted by LORENTZ transformations.

This mathematically unfounded conclusion was taken for granted in the subsequent literature, therefore becoming a main stoppage for an improvement of the theory, due also to misstatements concerning the transformation of electromagnetic fields under LORENTZ transformations [44].

To give an answer to the problem of frame invariance, it would have been sufficient to revert to MAXWELL original treatment, as improved by J.J. THOMSON, and to elaborate on it with the invariant formalism of differential forms [44].

The new theory exposed below is formulated to fulfil two basic guidelines. An interpretation as direct as possible of experimental evidences, and a geometrically correct mathematical modelling. The theory develops entirely in the classical framework and consists in the adoption of electric and magnetic induction laws formulated as balance principles pertaining to arbitrary curvilinear paths undergoing piecewise regular motions.

The power of the theory in providing clear interpretations to experimental evidences is shown by several applications in Sect. 6. Flux rules are recovered for closed paths undergoing regular motions, but the LORENTZ *force rule* is denied to be a basic law of the theory, being reduced, after a correction by a factor one-half, to a special expression detected by special observers investigating special situations, as shown in Sect. 6.1.

2. DIFFERENTIAL FORMS

The theory of integration over compact manifolds, whether orientable or not, is treated in [1] and resumed in [39]. We recall here only some basic issues, for future reference.

Definition 2.1 (Multi-covectors and differential exterior forms). *A k -covector ω^k in a n -dimensional linear space V ($k \leq n$) is an alternating k -linear real valued map on the tangent manifold TV . This means that the exchange of two argument results in the sign change the scalar value and we write $\omega^k \in \text{ALT}^k(TV)$.*

A non-null n -covector on V vanishes if and only if its arguments are linearly dependent and all n -covector are proportional one another.

A non-null n -covector ω^n provides the natural way of computing an n -volume of an n -parallelepiped. A differential exterior form of order k (or simply a k -form) is a smooth field of k -covectors defined on a n -manifold.

Integral laws in Mathematical Physics are naturally formulated in terms of exterior forms because integrals over (inner) orientable manifold of dimension k are in fact evaluations of global k -volumes.

Therefore there is no surprise that the electromagnets theory, which is governed by integral balance laws, is most conveniently developed in terms of exterior forms representing electric charges and electric and magnetic fields.

Noteworthy contributions, with applications of differential geometric notions to theoretical and computational aspects of electromagnetism were provided by G.A. DESCHAMPS [12, 13], A. BOSSAVIT [4, 5, 6] and E. TONTI [51, 52].

An important issue concerns orientations of manifolds [48, 1].

We recall here just essential ideas. In a n -manifold a continuous volume n -form defines an (*inner*) orientation. The outer orientation is defined at each point by orienting a linear complement of the tangent space to the manifold.

For an orientable 2D surface the *inner orientation* on the surface is either clockwise or counter clockwise while the *outer orientation* through the surface is either from the negative face to the positive one or vice versa. Similarly, for 1D paths an (*inner*) orientation is a direction of walk along it, while an *outer orientation* is a choice of turning around it. For 3D manifolds an (*inner*) orientation can be either left-handed or right handed while an *outer orientation* is a source or a sink. The converse for a point (a 0D manifold).

The choice of an *orientation* in an orientable container manifold defines on its submanifolds an *outer orientation* associated with a given *inner orientation*. An inner (outer) orientation on a manifold induces an inner (outer) orientation on its boundary.

Integration of (*inner*) forms on an orientable manifold involves the choice of an inner orientation and the integral will change sign by changing the inner orientation. Integration on *outer* oriented manifolds involves *outer* forms that are defined by the property that they change sign on changing the orientation in spatial slices.

Chains of manifolds are generated by formal linear combination by integers with positive or negative coefficients depending on whether the orientations induced on common boundaries are compatible or not.

Adoption of the mathematical language provided by the theory of differentiable forms is most compelling when dealing with investigations about transformations induced by diffeomorphisms, such as space-time motions or changes of reference frame.

The tangent map $T\zeta : T\Omega \mapsto T\mathbf{M}$ associated with an injective smooth map $\zeta : \Omega \mapsto \mathbf{M}$, transforms a tangent vector $\mathbf{a} \in T\Omega$ into a pushed forward vector $\zeta\uparrow\mathbf{a} = T\zeta \cdot \mathbf{a} \circ \zeta^{-1} \in T\mathbf{M}$ tangent at the corresponding point on $\zeta(\Omega) \subset \mathbf{M}$. Here and in the sequel a dot $\cdot$ means fiberwise linear dependence on subsequent arguments.

The pull-back of a differential form ω on $T(\zeta(\Omega))$ by the map ζ is the differential form $\zeta\downarrow\omega$ on $T\Omega$ defined (assuming for simplicity a one-form) by

$$(\zeta\downarrow\omega)(\mathbf{a}) = \omega(\zeta\uparrow\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in T\Omega. \quad (1)$$

A physical field on a manifold $\mathbf{M}$, represented by a differential form ω on $T\mathbf{M}$, is *invariant* under a smooth invertible transformation (automorphism) $\chi : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}$ if

$$\omega = \chi\downarrow\omega. \quad (2)$$

A fundamental role is played by the notion of exterior derivative of a k -form on a manifold Ω , which extends to multidimensional manifolds the fundamental theorem of integral calculus of real functions.

Definitions and principal properties concerning exterior derivatives, recalled below, will be referred to in the development of the new theory of electromagnetic induction.

Definition 2.2 (Exterior derivative and Stokes' formula). *In a $(k+1)$ -dimensional compact manifold Ω with a k -dimensional boundary $\partial\Omega$, the exterior derivative associates to a k -form $\omega \in C^1(\Omega; \text{ALT}^k(T\Omega))$ a $(k+1)$ -form $d\omega \in C^1(\Omega; \text{ALT}^{(k+1)}(T\Omega))$ fulfilling STOKES' formula*

$$\int_{\Omega} d\omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{i}_{\partial}\downarrow\omega. \quad (3)$$

where $\mathbf{i}_{\partial} \in C^1(\partial\Omega; \Omega)$ is the embedding of the boundary manifold $\partial\Omega$ in the manifold Ω . The pull-back $\mathbf{i}_{\partial}\downarrow$ by the embedding is needed to transform exterior forms on $T\Omega$ to exterior forms on $T\partial\Omega$. For the sake of notational simplicity, it is often abusively omitted in STOKES' formula.

A manifold Ω with null boundary ($\partial\Omega = \mathbf{0}$) is said to be *closed*. A boundary $\partial\Omega$ is a closed manifold, i.e. $\partial\partial\Omega = \mathbf{0}$ for any manifold Ω .

From STOKES formula it follows that $dd\omega = 0$ for any form ω .

Analogously a differential form $\omega \in C^1(\Omega; \text{ALT}^k(T\Omega))$ is closed if $d\omega = \mathbf{0}$ and is exact if $\omega = d\alpha$ for some form $\alpha \in C^1(\Omega; \text{ALT}^{(k-1)}(T\Omega))$.

On manifolds that are contractable to a point every closed form is exact, a result known as POINCARÉ Lemma [1, 39].

3. KINEMATICS

In the theory of electromagnetic induction the container manifold is the 4D manifold $\mathcal{E}$ of physical events.

An observer performs a partition of $\mathcal{E}$ into disjoint *spatial slices* $\mathcal{E}(t)$ each associated with a time instant $t \in \mathcal{Z}$ (*Zeit* is *Time* in German) by means of a time-projection $t_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{Z}$. The spatial slices $\mathcal{E}(t)$ are level sets of the *time-projection* so that $\langle dt_{\mathcal{E}}, \mathbf{d} \rangle = 0$ for any spatial vector $\mathbf{d} \in T\mathcal{E}(t)$.

A congruence of time-lines provides a one-to-one correspondence between spatial slices. The time parametrisation of time lines generates a vector field of tangent 4-vectors $\mathbf{Z} \in T\mathcal{E}$ such that $\langle dt_{\mathcal{E}}, \mathbf{Z} \rangle = 1$.

A smooth map $\mathbf{i} : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{E}$ between a k D manifold $\mathcal{T}$, with $k \leq 3$, is an *immersion* if the tangent map $T\mathbf{i} : T\mathcal{T} \mapsto T\mathcal{E}$ is pointwise nonsingular. If moreover the co-restricted map $\mathbf{i} : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_{\mathcal{E}} = \mathbf{i}(\mathcal{T})$ is a diffeomorphism, the map is called an *embedding* and $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ is a submanifold of $\mathcal{E}$.

The *space-time motion* of a body is detected by an observer as a one-parameter ($\alpha \in \mathcal{Z}$ time lapse) family of smooth transformations (automorphisms) $\varphi_{\alpha} \in C^1(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}; \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$, over the *trajectory* submanifold $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$, fulfilling the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} & \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \\
 \uparrow \mathbf{i} & & \uparrow \mathbf{i} \\
 \mathcal{T} & \xrightarrow{\varphi_{\alpha}^{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\
 \downarrow t_{\mathcal{T}} & & \downarrow t_{\mathcal{T}} \\
 \mathcal{Z} & \xrightarrow{\theta_{\alpha}} & \mathcal{Z}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \varphi_{\alpha} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ \varphi_{\alpha}^{\mathcal{T}}, \\
 t_{\mathcal{T}} \circ \varphi_{\alpha}^{\mathcal{T}} = \theta_{\alpha} \circ t_{\mathcal{T}} \\
 t_{\mathcal{E}} \circ \varphi_{\alpha} = \theta_{\alpha} \circ t_{\mathcal{E}}.
 \end{array}
 \quad (4)$$

Here $\theta_{\alpha} : \mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z}$ is the time-translation defined by $\theta_{\alpha}(t) = t + \alpha$, so that Eq. (4)₃ means that the motion preserves simultaneity of events.

The motion *four-velocity* is $\mathbf{V} = \partial_{\alpha=0} \varphi_{\alpha}$ with $\langle dt_{\mathcal{E}}, \mathbf{V} \rangle = 1$.

The motion $\varphi_\alpha \in C^1(\mathcal{T}_\mathcal{E}; \mathcal{T}_\mathcal{E})$ draws on each spatial-slice $\mathcal{E}(t)$ a wake $\mathcal{W}(t)$ of events that are intersected by time-lines passing through the embedded trajectory. The union of all wakes is denoted by $\mathcal{W}$.

The space-time motion along the embedded trajectory are split by an observer into a *spatial motion* and a *time motion* fulfilling the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_\mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi_\alpha^S} & \mathcal{W} \\ \varphi_\alpha^Z \downarrow & \searrow \varphi_\alpha & \downarrow \varphi_\alpha^Z \\ \mathcal{W} & \xrightarrow{\varphi_\alpha^S} & \mathcal{T}_\mathcal{E} \end{array} \iff \varphi_\alpha = \varphi_\alpha^S \circ \varphi_\alpha^Z = \varphi_\alpha^Z \circ \varphi_\alpha^S, \quad (5)$$

The space-time velocity $\mathbf{V}$ is decomposed into the sum of *spatial* and *time* components $\mathbf{V} = \mathbf{Z} + \mathbf{v}$ with $\langle dt_\mathcal{E}, \mathbf{v} \rangle = 0$ and

$$\mathbf{v} := \partial_{\alpha=0} \varphi_\alpha^S, \quad \mathbf{Z} := \partial_{\alpha=0} \varphi_\alpha^Z. \quad (6)$$

A form ω^k on $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ is *spatial* if it vanishes when any of its k argument vectors, which are tangent to $\mathcal{E}$, is parallel to $\mathbf{Z}$.

The integral of the pull-back of a k -form ω^k over the placement $\varphi_\alpha(\Omega)$ is equal to the integral of the pull-back form over the placement Ω

$$\int_{\varphi_\alpha(\Omega)} \omega^k = \int_\Omega \varphi_{\alpha\downarrow} \omega^k. \quad (7)$$

Taking the time-derivative of Eq. (7) gives the LEE-REYNOLDS formula

$$\partial_{\alpha=0} \int_{\varphi_\alpha(\Omega)} \omega^k = \int_\Omega \partial_{\alpha=0} (\varphi_{\alpha\downarrow} \omega^k) = \int_\Omega \mathcal{L}_\mathbf{V} \omega^k. \quad (8)$$

The exterior derivative of differential forms commute with the pull-back by the motion

$$d \circ \varphi_{\alpha\downarrow} = \varphi_{\alpha\downarrow} \circ d, \quad (9)$$

a result following from STOKES and integral transformation formulae

$$\begin{aligned} \int_\Omega d(\varphi_{\alpha\downarrow} \omega^k) &= \oint_{\partial\Omega} \varphi_{\alpha\downarrow} \omega^k = \oint_{\varphi_\alpha(\partial\Omega)} \omega^k \\ &= \oint_{\partial\varphi_\alpha(\Omega)} \omega^k = \int_{\varphi_\alpha(\Omega)} d\omega^k = \int_\Omega \varphi_{\alpha\downarrow} (d\omega^k). \end{aligned}$$

Then also $\mathcal{L}_V(d\omega^k) = d(\mathcal{L}_V \omega^k)$.

More in general, a smooth automorphic transformation $\zeta_\mathcal{E} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ (a frame transformation) induces a correspondence $\zeta : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_\zeta$ between trajectories $\mathcal{T}$ and $\mathcal{T}_\zeta$, according to the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\zeta_\mathcal{E}} & \mathcal{E} \\ \uparrow \mathbf{i} & & \uparrow \mathbf{i}_\zeta \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{T}_\zeta \end{array} \iff \zeta_\mathcal{E} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i}_\zeta \circ \zeta, \quad (10)$$

and we have the commutation rule

$$d \circ \zeta \downarrow = \zeta \downarrow \circ d_\zeta, \quad (11)$$

where d and d_ζ are the exterior derivatives respectively on $\mathcal{T}$ and on $\mathcal{T}_\zeta$. Accordingly, the motions detected in the two frames are related by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_\zeta & \xrightarrow{(\varphi_\alpha^\mathcal{T})_\zeta} & \mathcal{T}_\zeta \\ \zeta \uparrow & & \uparrow \zeta \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\varphi_\alpha^\mathcal{T}} & \mathcal{T} \end{array} \iff (\varphi_\alpha^\mathcal{T})_\zeta \circ \zeta = \zeta \circ \varphi_\alpha^\mathcal{T}, \quad (12)$$

with space-time *four-velocities* related by $\mathbf{V}_{\zeta_\mathcal{E}} = \zeta_\mathcal{E} \uparrow \mathbf{V}$.

The *LIE-derivative*, along the space-time motion $\varphi_\alpha \in C^1(\mathcal{T}_\mathcal{E}; \mathcal{T}_\mathcal{E})$, of a k -form ω^k on the embedded trajectory $\mathcal{T}_\mathcal{E}$, is the time-derivative $\mathcal{L}_V \omega^k$ of the pull-back form which is pointwise a time-dependent multicovector in the relevant tangent linear space

$$\mathcal{L}_V \omega^k := \partial_{\alpha=0} (\varphi_\alpha \downarrow \omega^k). \quad (13)$$

LIE-derivative transform in a natural way by the effect of diffeomorphic transformations $\zeta_\mathcal{E} \in C^1(\mathcal{E}; \mathcal{E})$

$$\zeta_\mathcal{E} \uparrow (\mathcal{L}_V \omega^k) = \mathcal{L}_{(\zeta_\mathcal{E} \uparrow V)} (\zeta_\mathcal{E} \uparrow \omega^k) \quad (14)$$

Under the assumption that for sufficiently small time lapse the spatial and time motions do not bring outside the trajectory submanifold, the split (5) and *LEIBNIZ* rule lead to the additive decomposition

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \omega^k &:= \partial_{\alpha=0} (\varphi_\alpha \downarrow \omega^k) = \partial_{\alpha=0} (\varphi_\alpha^S \circ \varphi_\alpha^Z) \downarrow \omega^k \\ &= \partial_{\alpha=0} \varphi_\alpha^S \downarrow \omega^k + \partial_{\alpha=0} \varphi_\alpha^Z \downarrow \omega^k = \mathcal{L}_Z \omega^k + \mathcal{L}_V \omega^k. \end{aligned} \quad (15)$$

Intersections of embedded trajectory $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ with spatial slices, are assumed to be compact k D submanifolds Ω called *placements* of the body.

3.1. Homotopy formula

The next result provides a generalisation of a well-known formula introduced by HELMHOLTZ for the evaluation of the time-rate of variation of the flux of a vector field, see Sect. 3.1.1. The formula was later reformulated in modern geometrical terms by H. CARTAN to deal with LIE derivatives of differential forms of any order along the flow associated to vector fields on a manifold.

The version we present here is further extended to include the representation of the LIE derivative along the space-time motion, of a form ω^k defined on the $(k+1)$ D trajectory submanifold $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ of the 4D event manifold $\mathcal{E}$ ($k \leq 3$).

As will be shown, this extension is essential to get the material homotopy formula, stated below in Prop. 3.1 and in Cor. 3.1, and proven in [39].

Proposition 3.1 (Homotopy formula). *The LIE-derivative $\mathcal{L}_V \omega^k$ of a spatial form ω^k along the motion, is expressed in terms of exterior derivatives by the homotopy formula*

$$\mathcal{L}_V \omega^k = (d_{\mathcal{T}} \omega^k) \cdot V + d(\omega^k \cdot V), \quad (16)$$

where $d_{\mathcal{T}}$ and d are exterior derivatives respectively on the trajectory manifold and on the placement manifold.

Corollary 3.1 (Spatial homotopy formula). *Under feasibility of the split $\mathcal{L}_V \omega^k = \mathcal{L}_Z \omega^k + \mathcal{L}_v \omega^k$, the LIE-derivative $\mathcal{L}_v \omega^k$ of a spatial form ω^k along the spatial motion, is expressed in terms of exterior derivatives by the spatial homotopy formula*

$$\mathcal{L}_v \omega^k = (d\omega^k) \cdot v + d(\omega^k \cdot v), \quad (17)$$

where d is the exterior derivative on a placement manifold.

3.1.1. Helmholtz formula

As a direct consequence of the homotopy formula we derive here a noteworthy formula, due to H. VON HELMHOLTZ, that provides the expression of the time rate of variation of the flux of a spatial vector field $\mathbf{u}$ across an outer oriented material surface Σ_{OUT} , with transversal normal $\mathbf{n}$, drifted by the motion.

Preliminarily we recall the definitions of vector cross product and of usual differential operators considered in vector field theories, in terms of exterior differential.

$$\begin{aligned}
 \text{cross product:} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, & (\dim \mathcal{E}(t) = 2) \\
 \text{cross product:} \quad \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, & (\dim \mathcal{E}(t) = 3) \\
 \text{gradient:} \quad d f &= \mathbf{g} \cdot \nabla f, & (\dim \mathcal{E}(t) = 2, 3) \\
 \text{curl:} \quad d(\mathbf{g}\mathbf{v}) &= (\text{rot } \mathbf{v}) \boldsymbol{\mu}, & (\dim \mathcal{E}(t) = 2) \\
 \text{curl:} \quad d(\mathbf{g}\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\mu} \cdot (\text{rot } \mathbf{v}), & (\dim \mathcal{E}(t) = 3) \\
 \text{divergence:} \quad d(\boldsymbol{\mu}\mathbf{v}) &= (\text{div } \mathbf{v}) \boldsymbol{\mu}, & (\dim \mathcal{E}(t) = 2, 3)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Setting $\omega^2 := \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \boldsymbol{\mu}_\Sigma$ with $\boldsymbol{\mu}_\Sigma = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}$, we apply the split $\mathcal{L}_\mathbf{v} \omega^k = \mathcal{L}_\mathbf{Z} \omega^k + \mathcal{L}_\mathbf{v} \omega^k$ and Eq. (17) to get

$$\begin{aligned}
 \partial_{\alpha=0} \int_{\varphi_\alpha(\Sigma_{\text{OUT}})} \omega^2 &= \int_{\Sigma_{\text{OUT}}} \mathcal{L}_\mathbf{Z} \omega^2 + \mathcal{L}_\mathbf{v} \omega^2 \\
 &= \int_{\Sigma_{\text{OUT}}} \mathcal{L}_\mathbf{Z} \omega^2 + d(\omega^2 \cdot \mathbf{v}) + (d\omega^2) \cdot \mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

To translate into the language of vector analysis we recall that

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \\
 d(\mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) &= \boldsymbol{\mu} \cdot (\text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{v})), \\
 d(\omega^2 \cdot \mathbf{v}) &= d(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = d(\mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) = \boldsymbol{\mu} \cdot (\text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{v})), \\
 (d\omega^2) \cdot \mathbf{v} &= d(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\text{div } \mathbf{u}) \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v},
 \end{aligned} \tag{20}$$

and observe that from $\mathcal{L}_\mathbf{Z} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ it follows that

$$\mathcal{L}_\mathbf{Z} \omega^2 = \mathcal{L}_\mathbf{Z} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}) = \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathcal{L}_\mathbf{Z} \mathbf{u}). \tag{21}$$

Substituting in Eq. (19) and setting $\dot{\mathbf{u}} := \mathcal{L}_\mathbf{Z} \mathbf{u}$, we get HELMHOLTZ's formula

$$\partial_{\alpha=0} \int_{\varphi_\alpha(\Sigma_{\text{OUT}})} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \boldsymbol{\mu}_\Sigma = \int_{\Sigma_{\text{OUT}}} \boldsymbol{\mu} \cdot (\dot{\mathbf{u}} + \text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\text{div } \mathbf{u}) \mathbf{v}). \tag{22}$$

3.2. Electromagnetic fields

Let $\mathbf{g}$ be the time invariant metric tensor field in the spatial slices and $\boldsymbol{\mu}$ the associated volume form that takes a unitary value on spatial cubes with sides of unit length.

The *inner* one-form electric field $\omega_{\mathbf{E}}^1$, the *inner* one-form magnetic potential $\omega_{\mathbf{A}}^1$ and the *inner* two-form magnetic vortex $\omega_{\mathbf{B}}^2 = d\omega_{\mathbf{A}}^1$ are expressed in terms of the corresponding *inner* electric vector field $\mathbf{E}$, *inner* magnetic vector field $\mathbf{A}$, and *outer* vector field of magnetic induction $\mathbf{B}$, by

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}, \\ \omega_{\mathbf{A}}^1 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}, \\ \omega_{\mathbf{B}}^2 &= \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B},\end{aligned}\tag{23}$$

The *outer* one-form magnetic winding $\omega_{\mathbf{H}}^1$, the *outer* two-form electric induction flux $\omega_{\mathbf{D}}^2$, the *outer* one-form electric current winding $\omega_{\mathbf{J}}^1$, the *outer* two-form electric current flux $\omega_{\mathbf{J}}^2 = d\omega_{\mathbf{J}}^1$ are expressed in terms of the corresponding *outer* magnetic vector field $\mathbf{H}$, *inner* electric induction vector field $\mathbf{D}$, *outer* electric current vector potential $\mathbf{A}_{\mathbf{J}}$, *inner* electric current vector field $\mathbf{J}$, and of the *inner* scalar electric charge ρ and the *outer* three-form electric charge density ω_{ρ}^3 , by

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{H}}^1 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{H}, \\ \omega_{\mathbf{D}}^2 &= \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D}, \quad d\omega_{\mathbf{D}}^2 = \omega_{\rho}^3 = \rho \boldsymbol{\mu}, \\ \omega_{\mathbf{J}}^1 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{J}}, \quad \omega_{\mathbf{J}}^2 = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{J}.\end{aligned}\tag{24}$$

The electromagnetic constitutive relations are then expressed by the following relations

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}), \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0(\mathbf{E}),\tag{25}$$

where μ_0 and ε_0 are suitable constitutive functions. The former relates the *outer* fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$, while the latter relates the *inner* fields $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$.

From the formulae in Eq. (20) we have the following correspondences.

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{B}}^2 = d\omega_{\mathbf{A}}^1 &\iff \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \\ d\omega_{\mathbf{B}}^2 = dd\omega_{\mathbf{A}}^1 = 0 &\iff \text{div rot } \mathbf{A} = 0, \\ \omega_{\mathbf{J}}^2 = d\omega_{\mathbf{J}}^1 &\iff \mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{A}_{\mathbf{J}}, \\ d\omega_{\mathbf{J}}^2 = dd\omega_{\mathbf{J}}^1 = 0 &\iff \text{div rot } \mathbf{A}_{\mathbf{J}} = 0.\end{aligned}\tag{26}$$

4. ELECTRIC INDUCTION

4.1. State of the Art

FARADAY's law of electromagnetic induction due to a variable magnetic vortex along a space-time motion, is classically stated as a *flux rule* [15, II.17-1], as reproduced below in Eq. (34).

The validity of this rule as a general law of Physics has been however questioned since long ago, due to difficulties in providing a clear interpretation to simple induction phenomena.

In *The Feynman Lectures on Physics* [15, II.17-1], R.P. FEYNMAN, in illustrating FARADAY law of induction, says:

We know of no other place in physics where such a simple and accurate general principle requires for its real understanding an analysis in terms of two different phenomena. Usually such a beautiful generalization is found to stem from a single deep underlying principle. Nevertheless, in this case there does not appear to be any such profound implication. We have to understand the rule as the combined effect of two quite separate phenomena.

Moreover in [15, ch. II.17-2], in commenting the difficulties emerging from applying the flux rule to FARADAY disk and to a circuit closed by rocking contacts, envisaged for discussing the applicability of FARADAY law of magnetic induction, he says that:

The "flux rule" does not work in this case. It must be applied to circuits in which the material of the circuit remains the same. When the material of the circuit is changing, we must return to the basic laws. The correct physics is always given by the two basic laws $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ and $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Here ($\dot{\mathbf{B}} := \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \mathbf{B}$).

We may see that the way out envisaged by FEYNMAN consists in the following suggestions.

1. To abandon the flux rule as a general foundational principle for the theory of electromagnetic induction.
2. To accept that the force on the unit electric charge is given by the addition of a *transformer* electric field $\mathbf{E}$ and of a LORENTZ force field $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. The former electric field fulfils the induction law for a fixed unit charge, while the latter depends linearly on the spatial velocity of the unit charge.

It is clear that FEYNMAN himself was not really satisfied by the lack of elegance of these "basic" laws.

Here an unwritten principle of Physics shows its power: *Beauty and effectiveness must go together in assessing general rules.*

4.2. Open questions

Prior to illustrating the way out proposed here, let us make some introductory considerations.

FEYNMAN's point of view was shared by everyone engaged in electromagnetic theory.

Item 1) in FEYNMAN's suggestion was motivated by the difficulty of interpreting some experimental evidences in simple induction phenomena. Moreover, it is certainly not at all clear how to evaluate the *flux* of the magnetic induction and its time variation, in many technically important applications.

A simple and important instance is provided by an inductive coil in which an isolated conductive wire is winded in a complex way around a cylinder. What is there the surface through which the magnetic flux is to be evaluated?

Item 2) in FEYNMAN's suggestion is not clearly motivated and clashes against an evident deficiency. The field providing the LORENTZ force term depends on the observer appointed of measurements of time rate $\dot{\mathbf{B}}$ and of spatial velocity $\mathbf{v}$ of the moving charge. What is more, the whole expression of the electric force $\mathbf{F}$ acting on the charge is not independent of a GALILEI change of observer, a fact that is physically not acceptable.

In the Sect. II.13-6 of [15], entitled *The relativity of magnetic and electric fields*, FEYNMAN writes:

When we said that the magnetic force on a charge was proportional to its velocity, you may have wondered: "What velocity? With respect to which reference frame?" It is, in fact, clear from the definition of $\mathbf{B}$ given at the beginning of this chapter that what this vector is will depend on what we choose as a reference frame for our specification of the velocity of charges. But we have said nothing about which is the proper frame for specifying the magnetic field.

FEYNMAN's was then well aware of this difficulty and strived to find a way out also in this case by resorting to the transformation rule of electromagnetic fields in special relativity. The same relativity argument was adduced later by E.M. PURCELL in [38, ch.5].

It is certainly surprising that the understanding of simple induction phenomena must require relativity arguments also when the involved speeds are extremely lower than that of light.

The strangeness of this motivation has been confirmed by a revision of the transformation rule of electromagnetic fields in special relativity [44].

Anyway, the relativity arguments adduced by FEYNMAN and PURCELL deal formally only with the LORENTZ force term and do not resolve the indeterminacy of the time rate $\dot{\mathbf{B}}$ (at a fixed spatial point) which remains a term dependent on the observer.

4.3. *The new rule of electric induction*

We show here that overcoming the exposed difficulties in the theory of electromagnetic induction is feasible without abandoning the classical framework, which is so useful and familiar to electrical engineers, and that this result can be achieved by means of a physically clear modification of the governing rules.

The new rules are elegant and able to resolve all long lasting troubles. FARADAY's rule is only a special case of a more general balance rule involving integrals along any spatial path.

No surface to evaluate the flux of the magnetic induction is needed, no closed loop to evaluate the electromotive force (E.M.F.) is needed, and an observer independent differential expression for the electric field is provided.

Applications to challenging induction phenomena classically exposed in literature, such as FARADAY's disc (BARLOW's wheel), the *homopolar* generator and HERING's experiment, see e.g. [28] show that effective interpretations can be given by the new theory.

On the other hand a correction to standard formulae, by a factor one-half, must be made. Among induction phenomena that need this revision we quote the HALL effect [17] and the *railgun* functioning.

Guided by the previous considerations about the difficulties involved in detecting a surface for application of the *flux rule*, and by the evidence of BIOT-SAVART and AMPÈRE laws concerning the magnetic field induced by a current carrying rectilinear wire and the mutual forces exerted by current carrying wires, we introduce the new *Electric Induction Law* (E.I.L.) and *Magnetic Induction Law* (M.I.L.), which are balance laws involving arbitrary curvilinear paths undergoing motions which are required to be only *piecewise regular*. The latter will be treated in Sect. 5.

The *Electric Induction Law* law is more general than FARADAY's flux rule and reduces to it for circuits (i.e. closed paths) undergoing *regular* motions. To simplify the statement we set the following.

Definition 4.1. *The electromotive force $\text{E.M.F.}(L_{\text{INN}})$ along an inner oriented material path L_{INN} is the sum of bulk and boundary contributions*

$$\text{E.M.F.}(L_{\text{INN}}) := \int_{L_{\text{INN}}} \omega_{\mathbf{E}}^1 + \int_{\partial L_{\text{INN}}} P, \quad (27)$$

where the induced electric field $\omega_{\mathbf{E}}^1$ is an inner one-form and the electrostatic scalar potential P is an inner zero-form fulfilling COULOMB's inverse-square force law.

Definition 4.2. *The magnetic momentum along an inner oriented spatial path L_{INN} is the line-integral of the magnetic induction*

$$\text{M.G.M.}(L_{\text{INN}}) := \int_{\varphi_{\alpha}(L_{\text{INN}})} \omega_{\mathbf{A}}^1. \quad (28)$$

Remark 4.1. *The magnetic one-form $\omega_{\mathbf{A}}^1$ and the associated vector potential $\mathbf{A}$ are related by $\omega_{\mathbf{A}}^1 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}$ so that*

$$\varphi_{\alpha} \downarrow \omega_{\mathbf{A}}^1 = \varphi_{\alpha} \downarrow (\mathbf{g} \cdot \mathbf{A}) = (\varphi_{\alpha} \downarrow \mathbf{g}) \cdot (\varphi_{\alpha} \downarrow \mathbf{A}), \quad (29)$$

and by LEIBNIZ rule

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1 &= \partial_{\alpha=0} \varphi_{\alpha} \downarrow \omega_{\mathbf{A}}^1 = (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{g} \cdot (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{g} \cdot \text{EUL}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{g} \cdot (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{A}), \end{aligned} \quad (30)$$

where $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{g} = \mathbf{g} \cdot \text{EUL}(\mathbf{v})$, being $\text{EUL}(\mathbf{v}) = \text{sym } \nabla \mathbf{v}$ the EULER stretching formula of Continuum Mechanics, expressed in terms of the LEVI-CIVITA connection ∇ .

Principle 4.1 (Electric induction law). *Along inner oriented material paths L_{INN} dragged by a piecewise regular space-time motion $\varphi_{\alpha} \in C^1(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}; \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$, the time rate of the magnetic momentum is opposite to of the sum of bulk and boundary electromotive forces*

$$\text{E.M.F.}(L_{\text{INN}}) := \int_{L_{\text{INN}}} \omega_{\mathbf{E}}^1 + \int_{\partial L_{\text{INN}}} P = -\partial_{\alpha=0} \int_{\varphi_{\alpha}(L_{\text{INN}})} \omega_{\mathbf{A}}^1. \quad (31)$$

Applying the LIE-REYNOLDS formula (8) and localizing, from (30), recalling that $dP = \mathbf{g} \cdot \nabla P$, we get the differential law

$$\begin{aligned} -\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + dP \iff \\ -\mathbf{E} &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{A} + \text{EUL}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} + \nabla P. \end{aligned} \quad (32)$$

Proposition 4.1 (Split of differential electric induction law). *Under feasibility of the split $\mathcal{L}_{\mathbf{V}} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \omega_{\mathbf{A}}^1$, the differential law (32) may be formulated by the alternative expression*

$$\begin{aligned} -\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v} + d(\omega_{\mathbf{A}}^1 \cdot \mathbf{v}) + dP \iff \\ -\mathbf{E} &= \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \mathbf{A} + \mathbf{B} \times \mathbf{v} + \nabla(\mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{v})) + \nabla P. \end{aligned} \quad (33)$$

Proof. The result is a direct consequence of Eq. (17) in Corol. 3.1. $\blacksquare$

Proposition 4.2 (Faraday's flux rule). *Assuming that the path $L_{\text{INN}} = \partial\Sigma_{\text{INN}}$ is the boundary of an inner oriented surface Σ_{INN} undergoing a regular motion, the integral E.I.L. reduces to FARADAY's flux rule:*

$$-\oint_{\partial\Sigma_{\text{INN}}} \omega_{\mathbf{E}}^1 = \partial_{\alpha=0} \int_{\varphi_{\alpha}(\Sigma_{\text{INN}})} \omega_{\mathbf{B}}^2, \quad (34)$$

equivalent to the differential law

$$\begin{aligned} -d\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \omega_{\mathbf{B}}^2 \iff \\ -\text{rot } \mathbf{E} &= \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \mathbf{B} + \text{TR}(\text{EUL}(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (35)$$

Proof. Being $\partial L_{\text{INN}} = \partial\partial\Sigma_{\text{INN}} = 0$ and setting $\omega_{\mathbf{B}}^2 := d\omega_{\mathbf{A}}^1$

$$\oint_{\varphi_{\alpha}(\partial\Sigma_{\text{INN}})} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \oint_{\partial\varphi_{\alpha}(\Sigma_{\text{INN}})} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \int_{\varphi_{\alpha}(\Sigma_{\text{INN}})} d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \int_{\varphi_{\alpha}(\Sigma_{\text{INN}})} \omega_{\mathbf{B}}^2, \quad (36)$$

and the E.I.L. (31) gives Eq. (34). Independence of the choice of the surface Σ_{INN} such that $L_{\text{INN}} = \partial\Sigma_{\text{INN}}$ is inferred since the chain of two such surfaces is the boundary of a 3D manifold V_{INN} and by the assumption that $d\omega_{\mathbf{B}}^2 = 0$ (there are no magnetic monopoles) whence

$$\oint_{\varphi_{\alpha}(\partial V_{\text{INN}})} \omega_{\mathbf{B}}^2 = \int_{\varphi_{\alpha}(V_{\text{INN}})} d\omega_{\mathbf{B}}^2 = 0. \quad (37)$$

The differential Eq. (35)₁ is deduced by localisation and Eq. (35)₂ comes from

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}} \omega_{\mathbf{B}}^2 = \mathcal{L}_{\mathbf{V}} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{V}} (\mathbf{B}), \quad (38)$$

with $\mathcal{L}_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\mu} = \text{TR}(\text{EUL}(\mathbf{v})) \boldsymbol{\mu}$ since the volumetric stretching is the linear invariant of the EULER stretching tensor. $\blacksquare$

Remark 4.2. *The standard formulation of Eq. (34) cannot be directly applied to induction phenomena in which the material path L_{INN} is not the boundary of a surface Σ_{INN} (this is a most usual situation in applications, as for instance in evaluating the E.M.F. generated in a coil immersed in a magnetic induction field). Moreover the usual denomination of flux rule should be changed into vorticity rule to conform to the physically consistent assumption of an inner oriented surface, and to MAXWELL's point of view.*

The effectiveness of the general expression of the E.I.L. provided by (31) and (32) is readily checked versus experimental evidences of FARADAY unipolar motor/generator and of conductive bar sliding on rails in a transversal magnetic induction, whose interpretation on the basis of the flux rule (34) is troublesome, as reported also in the recent literature [28]. These experimental evidences will be discussed in Sect. 6.

4.4. Historical notes

The expression (33) of the differential E.I.L. is coincident with the one contributed in cartesian coordinates by J.J. THOMSON in 1893, [50, Ch.VII, "Electromotive intensity in moving bodies", p.534]. This was the first (and to the author's knowledge, also the last) appearance of the terms $d\langle\omega_{\mathbf{A}}^1, \mathbf{v}\rangle$. This term was absent in the previous treatments by MAXWELL [8, 9, 10] because, according to J.J. THOMSON, the scalar field $\langle\omega_{\mathbf{A}}^1, \mathbf{v}\rangle$ was there merged with the electrostatic potential P into a global scalar potential Ψ .

The induction law formulated by MAXWELL in [8, (77) p. 342] and [9, (D) p. 485] writes

$$\begin{aligned} -\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v} + d\Psi && \Longleftrightarrow \\ -\mathbf{E} &= \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{B} \times \mathbf{v} + \nabla\Psi, \quad (\dot{\mathbf{A}} := \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (39)$$

Eq. (39) shows that the force term $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, usually named after LORENTZ, was introduced about thirty years before by MAXWELL who formulated the expression of the magnetically induced electric field in terms of the vector potential $\mathbf{A}$. The term is in fact also reported by HERTZ in [24] as a well-known result.

In the subsequent literature the scalar potential Ψ was wrongly identified with the electrostatic potential and hence, due to the lack of the velocity depending term $d\langle\omega_{\mathbf{A}}^1, \mathbf{v}\rangle$, the expression of the electric field provided by Eq. (39) became observer dependent.

What is more, according to simplifications introduced by HEAVISIDE [19] and HERTZ [24] about the end of the nineteenth century, the induction law was expressed in terms of the sole magnetic induction field $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

Accordingly, Eq. (39) was written, setting $\dot{\mathbf{B}} := \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \mathbf{B}$, as an equality in terms of rotors

$$-\text{rot } \mathbf{E} = \dot{\mathbf{B}} + \text{rot } (\mathbf{B} \times \mathbf{v}). \quad (40)$$

Since scalar potentials vanish in Eq. (40), the differences between Eq. (33) and (39) result to be completely obfuscated.

This is a major drawback since the expression Eq. (33), in terms of the vector potential $\mathbf{A}$, is the one fulfilling the basic property of observer independence of the electric field. This is readily checked by Eq. (32)₁ on the basis of the naturality properties Eq. (14) and (11).

As a consequence, the inductive E.M.F. was since then universally considered to stem from two distinct sources, see e.g. Refs. [56], [35], [37], [15], [2], [38], [27], [25], [26], [54], [28], [47].

1. The first source, due to variability of magnetic induction with time in a circuit at rest, is the time-derivative at fixed spatial position (the *transformer* term).

$$-\mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 = -\mathbf{g} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \mathbf{B} \quad (41)$$

2. The second source, due to motion of the charge in presence of the magnetic vortex field, is evaluated by the one-form $-\omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (the *motional* term).

This latter term is also usually referred to as "LORENTZ force", a name still widespread in literature on electromagnetic induction, but with a faulty motivation.

The motivation why the *motional* term was *not* attributed to MAXWELL but to LORENTZ, finds its roots in the transformation rules for electromagnetic fields due to changes of observer assumed by LORENTZ [32], EINSTEIN [14] and MINKOWSKI [33].

Space-time frame transformations, corresponding to relative translational motions which preserve the speed c of light in *vacuo* were named after LORENTZ by POINCARÉ [36], but, according to MINKOWSKI [33], this transformation was conceived about two decades before by VOIGT in [55].

The analysis of LORENTZ frame transformations performed originally in [32] and reported in [14], led to the conclusion that the electric field would be modified in its component transversal to the relative motion, by the addition

of a term $\mathbf{w} \times \mathbf{B}$, where $\mathbf{w}$ is the relative velocity evaluated by the observer who is performing the measurements, and by an increase according to the relativistic factor

$$\gamma := (1 - w^2/c^2)^{-1/2}, \quad (42)$$

where $w = \sqrt{\mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{w})}$ is the relative speed.

The transformation of parallel and transversal components of the electric field, assumed by the treatments of special relativity exposed in [32], [14], [33], is given by

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\parallel} \mapsto \mathbf{E}^{\parallel}, \\ \mathbf{E}^{\perp} \mapsto \gamma (\mathbf{E}^{\perp} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}). \end{cases} \quad (43)$$

Clearly, the additive term $\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ in Eq. (43)₂ does not vanish in the classical limit $\gamma \rightarrow 1$ and would therefore also be generated by a GALILEI change of frame, and this is an unreliable conclusion.

Moreover, under the action of a LORENTZ frame transformation, a spatial electric field is pushed into a space-time field that is no more a spatial field, in the same reference frame. Indeed LORENTZ transformations do not preserve simultaneity of events. Accordingly, in a relativistic context a full space-time formulation of electromagnetics, should be adopted, as first conceived in [18, 3, 7], reported in [53, 34] and recently revised in [44].

A space-time formulation of electromagnetic induction, requires concepts and methods of Differential Geometry, with special regard to exterior calculus of differential forms.

As a matter of fact, the differential geometric analysis recently performed in [44], reveals that the transformation expressed by Eq. (43) is the outcome of a wrong evaluation of the way in which the electric field transforms under a change of frame.

According to the results exposed in [44] the transversal component of the electric field is unchanged by the LORENTZ transformation, while the parallel component is changed, as expressed by

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\parallel} \mapsto \gamma (\mathbf{E}^{\parallel} - \mathbf{g}(\mathbf{v}/c, \mathbf{E}) \mathbf{w}/c), \\ \mathbf{E}^{\perp} \mapsto \mathbf{E}^{\perp}, \end{cases} \quad (44)$$

where $\mathbf{v}$ is the spatial velocity of the body, assumed to vanish in the treatment leading to Eq. (43). The electric field results to be *not* changed by LORENTZ transformations in the classical limit $\gamma \rightarrow 1$, and hence also by GALILEI transformations, as expected on physical ground.

4.5. Frame Invariance

The troubles concerning what observer is measuring the spatial velocity $\mathbf{v}$, clearly exposed by FEYNMAN in [15, II.13-6], are overcome by adding to Eq. (39) the missing term $d\langle\omega_{\mathbf{A}}^1, \mathbf{v}\rangle$ included in the complete expression Eq. (33).

Observer-invariance of the E.I.L. is then proven on the basis of the naturality properties Eqs. (11) and (14) of the differential dP and of the LIE derivative $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\omega_{\mathbf{A}}^1$.

Indeed, observer-invariance of the electromagnetic fields, under (simultaneity preserving) EUCLID change of frame $\zeta : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_{\zeta}$, is assumed as a basic axiom of the theory.

This means that for the one-forms $\omega_{\mathbf{E}}^1$ and $\omega_{\mathbf{A}}^1$ and for the scalar potential P we have

$$(\omega_{\mathbf{E}}^1)_{\zeta} = \zeta^{\uparrow}\omega_{\mathbf{E}}^1, \quad (\omega_{\mathbf{A}}^1)_{\zeta} = \zeta^{\uparrow}\omega_{\mathbf{A}}^1, \quad (P)_{\zeta} = \zeta^{\uparrow}P, \quad (45)$$

so that the differential E.I.L. fulfils the frame invariance property

$$\begin{aligned} -\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\omega_{\mathbf{A}}^1 + dP \quad \Longleftrightarrow \\ -\zeta^{\uparrow}\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \zeta^{\uparrow}(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\omega_{\mathbf{A}}^1) + \zeta^{\uparrow}(dP) \quad \Longleftrightarrow \\ -\zeta^{\uparrow}\omega_{\mathbf{E}}^1 &= \mathcal{L}_{(\zeta^{\uparrow}\mathbf{v})}(\zeta^{\uparrow}\omega_{\mathbf{A}}^1) + d_{\zeta}(\zeta^{\uparrow}P) \quad \Longleftrightarrow \\ -(\omega_{\mathbf{E}}^1)_{\zeta} &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\zeta}}(\omega_{\mathbf{A}}^1)_{\zeta} + d_{\zeta}P_{\zeta}. \end{aligned} \quad (46)$$

5. MAGNETIC INDUCTION

The MAXWELL-AMPÈRE's law of electromagnetic induction of a magnetomotive force (M.M.F.), due to an electric current flux, is classically stated as a *flux rule*, see Eq. (50) below.

Let us consider, a region where electric charges are absent (i.e. $\omega_{\rho}^3 = \mathbf{0}$) and there are no sources of electric current (i.e. $d\omega_{\mathbf{J}}^2 = \mathbf{0}$).

We show that therein the MAXWELL-AMPÈRE's law can be formulated as a balance law for a magnetic winding *outer* one-form $\omega_{\mathbf{H}}^1$, involving the electric induction *outer* one-form $\omega_{\mathbf{D}}^1$ and the electric current potential *outer* one-form $\omega_{\mathbf{J}}^1$, which we will call the Magnetic Induction Law (M.I.L.).

By GAUSS law $\omega_{\rho}^3 = d\omega_{\mathbf{D}}^2$ and by assumption $\omega_{\rho}^3 = \mathbf{0}$ and $d\omega_{\mathbf{J}}^2 = \mathbf{0}$, Then, by POINCARÉ lemma in Sect. 2, we get $\omega_{\mathbf{D}}^2 = d\omega_{\mathbf{D}}^1$ and $\omega_{\mathbf{J}}^2 = d\omega_{\mathbf{J}}^1$.

Principle 5.1 (Magnetic induction Law). *Around an outer oriented spatial path dragged by a piecewise regular space-time motion $\varphi_\alpha \in C^1(\mathcal{T}_E; \mathcal{T}_E)$, the induced magnetomotive force (M.M.F.) is equal to the sum of the time rate of the integral of the electric winding ω_D^1 and of the integral of the electric current potential ω_J^1*

$$\text{M.M.F.}(L_{\text{OUT}}) := \int_{L_{\text{OUT}}} \omega_H^1 = \partial_{\alpha=0} \int_{\varphi_\alpha(L_{\text{OUT}})} \omega_D^1 + \int_{L_{\text{OUT}}} \omega_J^1. \quad (47)$$

Applying the LIE-REYNOLDS formula Eq. (8) and localizing, we get the differential law

$$\begin{aligned} \omega_H^1 &= \mathcal{L}_V \omega_D^1 + \omega_J^1 \iff \\ H &= \mathcal{L}_V D + \text{EUL}(V) \cdot D + A_J. \end{aligned} \quad (48)$$

Proposition 5.1 (Split of differential magnetic induction law). *Under feasibility of the split $\mathcal{L}_V \omega_D^1 = \mathcal{L}_Z \omega_D^1 + \mathcal{L}_V \omega_D^1$, the integral law (47) is equivalent to the frame invariant differential law*

$$\begin{aligned} \omega_H^1 &= \mathcal{L}_Z \omega_D^1 + \omega_D^2 \cdot V + d(\omega_D^1 \cdot V) + \omega_J^1 \iff \\ H &= \mathcal{L}_Z A_D + D \times V + \nabla(g(D, V)) + A_J. \end{aligned} \quad (49)$$

Proof. The result is a direct consequence of Eq. (17) in Corol. 3.1. ■

Proposition 5.2 (Ampere's flux rule). *Assuming that the path $L_{\text{OUT}} = \partial\Sigma_{\text{OUT}}$ is the boundary of an outer oriented surface Σ_{OUT} undergoing a regular motion, the integral M.I.L. reduces to the standard MAXWELL-AMPÈRE's flux rule:*

$$\oint_{\partial\Sigma_{\text{OUT}}} \omega_H^1 = \partial_{\alpha=0} \int_{\varphi_\alpha(\Sigma_{\text{OUT}})} \omega_D^2 + \int_{\Sigma_{\text{OUT}}} \omega_J^2. \quad (50)$$

equivalent to the differential law

$$\begin{aligned} d\omega_H^1 &= \mathcal{L}_V \omega_D^2 + \omega_J^2 \iff \\ \text{rot } H &= \mathcal{L}_V D + \text{EUL}(V) \cdot D + A_J. \end{aligned} \quad (51)$$

Proof. Being $\partial L_{\text{OUT}} = \partial \partial \Sigma_{\text{OUT}} = 0$ and setting $\omega_{\text{D}}^2 := d\omega_{\text{D}}^1$ we get

$$\oint_{\varphi_{\alpha}(\partial \Sigma_{\text{OUT}})} \omega_{\text{D}}^1 = \oint_{\partial \varphi_{\alpha}(\Sigma_{\text{OUT}})} \omega_{\text{D}}^1 = \int_{\varphi_{\alpha}(\Sigma_{\text{OUT}})} d\omega_{\text{D}}^1 = \int_{\varphi_{\alpha}(\Sigma_{\text{OUT}})} \omega_{\text{D}}^2, \quad (52)$$

and the M.I.L. (47) gives Eq. (50).

Independence of the choice of the surface Σ_{OUT} such that $L_{\text{OUT}} = \partial \Sigma_{\text{OUT}}$ is inferred from the fact that two such surfaces are the boundary of a 3D manifold V_{OUT} and that the principle of *electric charge conservation* states that

$$\partial_{\alpha=0} \oint_{\varphi_{\alpha}(\partial V_{\text{OUT}})} \omega_{\text{D}}^2 + \int_{\partial V_{\text{OUT}}} \omega_{\text{J}}^2 = \int_{\partial V_{\text{OUT}}} \mathcal{L}_{\text{V}} \omega_{\text{D}}^2 + \omega_{\text{J}}^2 = \int_{V_{\text{OUT}}} d(\mathcal{L}_{\text{V}} \omega_{\text{D}}^2 + \omega_{\text{J}}^2) = 0. \quad (53)$$

By GAUSS law $\omega_{\rho}^3 = d\omega_{\text{D}}^2$, the *electric charge conservation* may be written as

$$d(\mathcal{L}_{\text{V}} \omega_{\text{D}}^2 + \omega_{\text{J}}^2) = \mathcal{L}_{\text{V}} d\omega_{\text{D}}^2 + d\omega_{\text{J}}^2 = \mathcal{L}_{\text{V}} \omega_{\rho}^3 + d\omega_{\text{J}}^2 = \mathbf{0}. \quad (54)$$

Splitting the LIE derivative into space and time directions, we get

$$\mathcal{L}_{\text{Z}} \omega_{\rho}^3 + \mathcal{L}_{\text{v}} \omega_{\rho}^3 + d\omega_{\text{J}}^2 = \mathbf{0}, \quad (55)$$

equivalent to

$$\mathcal{L}_{\text{Z}} \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \text{div} \mathbf{J} = 0. \quad (56)$$

which is due to HELMHOLTZ [20]. Eq. (51) is deduced as Eq. (32). $\blacksquare$

Remark 5.1. *The standard formulation Eq. (50) cannot be directly applied to explain induction phenomena in which the material path L_{OUT} is not the boundary of a surface Σ_{OUT} . This is a most usual situation in applications, as for instance in evaluating the M.M.F. induced by a coil where an electric current is passing.*

6. EXAMPLES OF APPLICATION

Our main interest is to show how the new electric induction law, exposed in Eqs. (31) and (32), is capable to provide a direct interpretation of experimental evidences which are not addressable, neither by the flux rule in Eq. (34) nor by the LORENTZ force in Eq. (39).

6.1. Charged body translating in a uniform magnetic vortex

Let a material body in a translational motion $\varphi_\alpha \in C^1(\mathcal{T}; \mathcal{T})$ with respect to an observer be crossing a region with a spatially constant value of the magnetic vortex two-form ω_B^2 , according to the standard EUCLID connection ∇ , so that:

$$\nabla \omega_B^2 = 0.$$

Let us first explain in discursive terms the idea leading to the result.

The *inner* vector potential $\mathbf{A}$ associated with the *outer* vector field $\mathbf{B}$ of magnetic induction may be assumed to have cylindrical symmetry around a longitudinal axis with linear radial distribution. The body velocity field is assumed to be orthogonal to the magnetic induction. Accordingly, the parallel derivative of the vector potential $\mathbf{A}$ along the motion velocity, is a vector field with the direction of the vector potential and intensity given by the product of half the intensity of the rotor of $\mathbf{A}$ times the intensity of the velocity. Taking into account the usual orientations, and evaluating the parallel derivative of the magnetic vector field $\mathbf{B}$, the electric field due to magnetic induction is given by *one-half* the standard expression of the LORENTZ force (per unit electric charge):

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (57)$$

To see this result in formulae, we premise the expression of the LIE derivative along the spatial vector field $\mathbf{v}$ of a spatial tensor field α_{Cov} in terms of parallel derivatives ∇ , which for a covariant tensor field writes [39]:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \alpha_{\text{Cov}} = \nabla_{\mathbf{v}} \alpha_{\text{Cov}} + \alpha_{\text{Cov}} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^* \cdot \alpha_{\text{Cov}}, \quad (58)$$

where the star $*$ denotes duality. This formula will be referred to in the following Lemma.

Lemma 6.1 (Linear Faraday potential). *A magnetic vortex field which is spatially constant, according to the standard connection of EUCLID space, so that $\nabla \omega_B^2 = 0$, admits a magnetic potential one-form ω_A^1 , such that $\omega_B^2 = d\omega_A^1$, having the linear distribution*

$$\omega_A^1 := \tfrac{1}{2} \omega_B^2 \cdot \mathbf{r} = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}. \quad (59)$$

Here $\boldsymbol{\mu}$ is the volume form associated with the metric tensor field $\mathbf{g}$. The vector field $\mathbf{r} \in C^1(\mathcal{S}; TS)$ is defined by $\mathbf{r}(\mathbf{p}) := \mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$ for all $\mathbf{x} = \mathbf{p} - \mathbf{o}$.

Proof. Clearly for any $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$ we have

$$\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} (\mathbf{r}(\mathbf{p} + \epsilon \mathbf{h}) - \mathbf{r}(\mathbf{p})) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} (\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h} - \mathbf{x}) = \mathbf{h}, \quad (60)$$

so that $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I}$, $(\nabla \mathbf{r})^* = \mathbf{I}^*$ with $\mathbf{I}$ identity map on $T\mathcal{S}$.

Being $d\omega_{\mathbf{B}}^2 = 0$ and by assumption $\nabla \omega_{\mathbf{B}}^2 = 0$, the homotopy formula and the expression Eq. (58) of the LIE derivative in terms of parallel derivative, give

$$d(\omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{r}) = \mathcal{L}_{\mathbf{r}} \omega_{\mathbf{B}}^2 = \nabla_{\mathbf{r}} \omega_{\mathbf{B}}^2 + \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \nabla \mathbf{r} + (\nabla \mathbf{r})^* \cdot \omega_{\mathbf{B}}^2 = 2 \omega_{\mathbf{B}}^2,$$

which is the result to be proved. $\blacksquare$

Proposition 6.1 (Electric field in a translating body). *A body with a translational motion, across a region of spatially uniform magnetic vortex $\omega_{\mathbf{B}}^2$, according to the standard connection ∇ of EUCLID space, experiences an electric field given by the formula*

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{E}}^1 &= -\mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 - \tfrac{1}{2} \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v} - dP \\ &= -\mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + d(\omega_{\mathbf{A}}^1 \cdot \mathbf{v}) - dP \iff \\ \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{A}} + \tfrac{1}{2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla P \\ &= -\dot{\mathbf{A}} + d\mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{v}) - \nabla P. \end{aligned} \quad (61)$$

Proof. Let us consider an observer detecting a translational motion $\varphi_{\alpha} \in C^1(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}; \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ and measuring the space-time velocity $\mathbf{V} := \partial_{\alpha=0} \varphi_{\alpha} = \mathbf{Z} + \mathbf{v}$, whose spatial component is uniform, i.e. $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$. From the formula for the LIE derivative in terms of parallel derivatives, we get

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \nabla_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + \omega_{\mathbf{A}}^1 \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1.$$

Being $\nabla \omega_{\mathbf{B}}^2 = 0$, Lemma 6.1 gives $\omega_{\mathbf{A}}^1 = \tfrac{1}{2} \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{r}$ and hence

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \nabla_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \tfrac{1}{2} \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v}.$$

Then, being $\nabla P = 0$, from (32) we infer that

$$-\omega_{\mathbf{E}}^1 = \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \mathcal{L}_{\mathbf{Z}} \omega_{\mathbf{A}}^1 + \tfrac{1}{2} \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v}.$$

Finally the computation

$$d(\omega_{\mathbf{A}}^1 \cdot \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2} d(\omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = -\tfrac{1}{2} d(\omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = -\tfrac{1}{2} \omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v}, \quad (62)$$

shows that electric field admits a velocity-dependent scalar potential. $\blacksquare$

The one-form

$$-\frac{1}{2}\omega_{\mathbf{B}}^2 \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (63)$$

provides the velocity-dependent part of the electric field (*force per unit electric charge*) as detected by an observer who measures a time-invariant magnetic potential $\omega_{\mathbf{A}}^1$ at a fixed spatial position ($\mathcal{L}_{\mathbf{Z}}\omega_{\mathbf{A}}^1 = \mathbf{0}$) and spatially uniform magnetic vortex $\omega_{\mathbf{B}}^2$ ($\nabla\omega_{\mathbf{B}}^2 = 0$) and scalar electric potential P ($\nabla P = \mathbf{0}$).

Remark 6.1. *It is manifest that the so-called LORENTZ force law is contradicted by the previous calculation leading to the formula $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, which instead agrees with the 1881 findings by J.J. THOMSON [49], later re-proposed in [50, Ch. VII, "Electromotive intensity in moving bodies", p.534]. His result was subsequently modified by HEAVISIDE in 1885 – 1889 and by HERTZ and LORENTZ in 1892, who eliminated the factor one-half, probably giving credit to the original formula Eq. (39) by MAXWELL.*

In [24, XVI-2, p.248] the expression in Eq. (39) was in fact considered as well-known by H.R. HERTZ who provided also a brief discussion and a warning against the interpretation, of the single terms there involved, as electric forces. These historical notes taken from the book [11], and the original contribution by J.J. THOMSON in [49], came to the attention of the author just after the present theory was independently developed.

6.2. Hering's experiment

HERING's experiment, discussed in [28, 6.1.4. p.349], can be interpreted according to the new rule Eq. (31) by observing that, in opening a closed circuit immersed transversally in a uniform magnetic field, there is no material line moving in the magnetic field and hence no E.M.F. is induced between the sliding contacts, as confirmed by the experimental results.

6.3. Faraday's Disc (Barlow's wheel)

The FARADAY disk is a classical device constructed from a brass or copper disk that can rotate in a transversal magnetic induction field. The induction E.M.F. between the axel of the disk and a point on its rim is measured by closing a circuit with the aid of brush contacts.

This failure of the *flux rule* has been recently reported also in [28, 6.1.4. p.349].

As a consequence of the new rule Eq. (31), and according to the special result in Eq. (57), the radially moving charges in the material are subject to a force $\frac{1}{2}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, with the velocity $\mathbf{v}$ of the charges measured by an observer who detects a time-invariant field of magnetic potential. This force distribution generates a torque that pushes the rotation of the wheel.

The new theory provides thus an interpretation free of ambiguity with a torque which is one half the one expressed by the LORENTZ force term. This is in accord with the new statement in Prop. 4.2 which requires regularity of the motion.

Contrary the common claims, the *flux rule* Eq. (34) has no validity for circuits with sliding contacts. This also clarifies the difficulties of standard treatment in interpreting the result of HERING's experiment 6.2.

6.4. Faraday's homopolar generator

According to FEYNMAN [15, II.17.2]: *as the disc rotates, the "circuit", in the sense of the place in space where the currents are, is always the same. But the part of the "circuit" in the disc is in material which is moving. Although the flux through the "circuit" is constant, there is still an E.M.F., as can be observed by the deflection of the galvanometer. Clearly, here is a case where the $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ force in the moving disc gives rise to an E.M.F. which cannot be equated to a change of flux.*

Let us now discuss FARADAY's *homopolar generator* by applying the new integral expression of the E.I.L. provided in Eq. (31).

If the magnetic vortex in the disk is spatially uniform and constant in time, the magnetic potential will be distributed with polar symmetry and consequently the magnetically induced electric field in the disk vanishes identically, because the time derivative at the r.h.s of (31) does vanish for any radial or circumferential path of integration. The same conclusion may be reached by a more involved differential analysis.

The electromotive force in the circuit will be non vanishing only if the magnetic vortex field in the disk is nonuniform. This result is in sharp contrast with the conclusions by FEYNMAN in [15, II.17.2] on the basis of LORENTZ force law, and suggests a simple experiment to confirm the new theory. An analysis of FARADAY homopolar generator based on the flow rule is reported by LEHNER in [28, 6.1.4. p. 350], with a doubtful conclusion about whether a fixed or a spinning radius should be considered.

Let us underline the different prediction of the new theory concerning FARADAY disk and FARADAY's *homopolar generator*.

If the conductive disc is immersed in a uniform magnetic induction field, no electromotive force is generated by spinning the disc, but, by applying an E.M.F. between sliding contacts at the axel and at the rim, a rotation of the disc will be induced.

6.5. *Sliding bar on rails under a uniform magnetic vortex*

Let us consider the problem concerning the electromotive force (E.M.F.) generated in a conductive bar of length l sliding on two fixed parallel rails under the action of a magnetic vortex which is spatially uniform, time-independent and coplanar. An observer sitting on the rails measures a time independent FARADAY potential field and may thus evaluate the E.M.F. due to the electric field distributed along the bar by integration

$$\omega_E^1 \cdot l = -\frac{1}{2} \omega_B^2 \cdot \mathbf{v} \cdot l. \quad (64)$$

On the other hand, by the integral flow rule formula, the E.M.F. should be evaluated along a circuit and hence would depend on how the circuit is closed.

This instructive problem is discussed in [47, C. *Moving Loop in Time-Varying Field*, Example 9.1, p. 375], by tacitly assuming a GALILEI observer sitting on the rails and adopting the LORENTZ force expression for the induced electric field.

The same problem with one bar fixed and another one translating on the rails is discussed in [15, II.17.1, fig.17.1] both in terms of the *flux rule* and in terms of the LORENTZ force (also with a tacit choice of the suitable GALILEI observer).

Both analyses lead to the same value of the total E.M.F. in the circuit given by

$$\omega_E^1 \cdot l = -\omega_B^2 \cdot \mathbf{v} \cdot l, \quad (65)$$

thus evaluating an electromotive force which is just doubled with respect to the one predicted by the new theory. As discussed above, according to the new theory the presence of sliding contacts, and hence of discontinuous velocities, prevents any application of the *flux rule*.

6.6. *The Hall effect*

The HALL effect consists in detecting a potential difference (HALL voltage) on opposite sides of a thin sheet of conducting or semiconducting material through which an electric current is flowing in presence of a coplanar magnetic vortex.

The experiments were first carried out by E.H. HALL on a thin gold sheet mounted on a glass plate at Johns Hopkins University [17], under the guidance of H.E. ROWLAND.

The motivation for the experiment adduced in HALL's paper is a reasoning on a statement by MAXWELL in [10, vol.II p.144].

The effect is commonly explained in terms of the LORENTZ force, but should be properly reinterpreted on the basis of formula (61) exposed in Prop.6.1 which differs by a factor one-half.

6.7. Mutual forces between parallel electric currents

Let two parallel conducting wires carry electric currents $\mathbf{i}_1$ and $\mathbf{i}_2$. By AMPÈRE law, the integral of the magnetic field $\mathbf{H}$ around circles centered at each current carrying wire is equal to the intensity of the respective electric current. It follows that the intensity of the magnetic field $\mathbf{H}$ and of the corresponding magnetic induction $\mathbf{B}$ decrease linearly with the distance d from the wire, according to the BIOT-SAVART law

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}_1 / (2\pi d). \quad (66)$$

The magnetic induction $\mathbf{B}$ due to $\mathbf{i}_1$ acts on $\mathbf{i}_2$ perpendicularly to the plane of wires and by Eq. (57) generates an electric field $\frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, with $\mathbf{i}_2 = q \mathbf{v}$, and hence a force per unit length, acting orthogonal to the wires in their plane, proportional to the ratio between the product of currents and their mutual distance, according to the law

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2) / (2\pi d), \quad (67)$$

which is one-half the standard AMPÈRE force law [25, (5.11) p.178].

The same for the $\mathbf{B}$ due to $\mathbf{i}_2$ and acting on $\mathbf{i}_1$. The effect of the electric fields will be mutually attractive if the currents flow in the same direction, repulsive otherwise.

6.7.1. The railgun: a weapon application

Let two parallel conductive rails and a sliding or rolling conductive projectile be subject to a high intensity electric current.

The magnetic field generated by the electric current according to the law Eq. (49)₂, gives rise to a magnetic vortex field $\omega_{\mathbf{B}}^2$ which acts back on the electric charges in motion along the conductive path, according to the law (57). This last action pushes away one from the other the two rails, which should then be properly fixed to remain in place, and pushes forward the sliding projectile, which undergoes a huge acceleration.

7. CONCLUSIONS

The assumption made on the basis of Eq. (40) that a magnetic induction field $\mathbf{B}$ generates on a moving charge a force that depends only on the values of the field $\mathbf{B}$ and of the spatial velocity field $\mathbf{v}$ just at the position occupied by the charge, is certainly appealing for the electrical engineer which gets therefrom a simple rule to apply for his computations. The satisfaction is however bound to turn soon into despair when he/she is called to provide a rationale for evaluating the charge velocity.

This notwithstanding the mysterious formula $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ is still suggested without comments in almost every book on electromagnetics. In the extreme case a still more mysterious argument based on space-time LORENTZ transformations is adduced to shut up questions and comments arising in a natural way from physically minded people. This dogmatic situation is still going on, as a heavy theoretical heritage after more than one century of brilliant technological evolution.

The author spent a large part of the last couple of years in collecting documentation concerning the complex state of affairs and only after taking the bold decision of revisiting the relativistic treatment of electromagnetics he arrived at the conclusion that the whole story did take the wrong path long ago [44].

After having rewritten the basic laws in terms of differential forms, the evaluation of the derivatives of integrals over moving manifolds can be correctly evaluated and localized in terms of LIE derivatives of the inducing fields along the motion.

The naturality properties of LIE derivatives and of exterior derivatives, assure frame invariance of the rules of electromagnets induction.

On this basis it has been shown that a new, frame invariant theory of classical electromagnetism can be formulated in terms of balance principles involving line integrals and their time derivatives along the motion.

For simultaneity preserving frame transformations, such as the ones considered in the classical theory, invariance of the classical laws of electromagnetic induction is assured.

For frame transformations that do not transform simultaneous events into events still evaluated to be simultaneous by the same observer, as occurs for LORENTZ transformations of special relativity, an entanglement of electric and magnetic fields is detected by an observer who tries to describe the transformed fields from his own point of view.

This entanglement, and the amplification according to the relativistic factor, tend however to vanish in the classical limit and are then negligible when ordinary velocities are involved [44], a result well expected on physical grounds.

References

- [1] Abraham, R., Marsden, J.E., Ratiu, T. (2002) *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer Verlag, New York.
- [2] Barut, A.O. (1980) *Electrodynamics and Classical Theories of Fields and Particles*, Dover, NY.
- [3] Bateman, H. (1910) The transformation of the electrodynamical equations, *Proc. Lond. Math. Soc.* **8** (2) 223–264.
- [4] Bossavit, A. (1991) *Differential Geometry for the student of numerical methods in Electromagnetism*. Électricité de France, Études et Recherches, 1991. <http://butler.cc.tut.fi/~bossavit/>
- [5] Bossavit, A. (2004) *Computational electromagnetism and Whitney forms*. Minneapolis, 11–15 May 2004. <http://butler.cc.tut.fi/~bossavit/>
- [6] Bossavit, A. (2005) *Applied Differential Geometry (A compendium)*. Électricité de France, Études et Recherches. <http://butler.cc.tut.fi/~bossavit/>
- [7] Cartan, E. (1924) Sur les varietés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (suite), *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **3**, 41, 1–25.
- [8] Clerk-Maxwell, J. (1861) On Physical Lines of Force, *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Science*, Fourth series, Part I, II, III, IV.
- [9] Clerk-Maxwell, J. (1865) A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (155) 459–512.
- [10] Clerk-Maxwell, J. (1873) *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. I, II. Oxford at Clarendon Press.
- [11] Darrigol, O. (2000) *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press.
- [12] Deschamps, G.A. (1970) Exterior differential forms. In: *Mathematics Applied to Physics*, Roubine É. (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 111–161.
- [13] Deschamps, G.A. (1981) Electromagnetics and differential form, *Proceedings of the IEEE*, **69** (6) 676–696.
- [14] Einstein, A. (1905) Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*. (17) 891.
- [15] Feynman, R.P., Leighton R.B. & Sands M.L. (1964) *The Feynman Lectures on Physics*, San Francisco, Pearson/Addison-Wesley.

- [16] Gibbs, J.W. (1929) *Vector analysis, a text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*. New Haven Yale Uni. Press. <http://www.archive.org/details/117714283>
- [17] Hall, E.H. (1879) On a New Action of the Magnet on Electric Currents, *American Journal of Mathematics* 2, 287–292.
- [18] Hargreaves, R. (1908) Integral forms and their connection with physical equations, *Camb. Phil. Trans.* 21, 107.
- [19] Heaviside, O. (1892) On the Forces, Stresses, and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field, *Phil. Trans. Royal Soc. A.* 183: 423–480.
- [20] Helmholtz, H. von (1870) Über die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung: Über die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende Körper, *Ann. Physik und Chemie*, Leipzig.
- [21] Helmholtz, H. von (1873) Über die Theorie der Elektrodynamik. Zweite Abhandlung: Kritische, *J. Reine Angew. Math.*
- [22] Helmholtz, H. von (1874) Über die Theorie der Elektrodynamik. Dritte Abhandlung: Die Elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern, *J. Reine Angew. Math.*
- [23] Helmholtz, H. von (1892) Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik, *Annalen der Physik*.
- [24] Hertz, H.R. (1892) *Untersuchungen über die Ausbreitung der Electricischen Kraft*, Teubner, Leipzig.
- [25] Jackson, J.D. (1999) *Classical Electrodynamics*, (3rd ed.), Wiley, New York.
- [26] Kovetz, A. (2000) *Electromagnetic Theory*, Oxford University Press. USA.
- [27] Landau, L.D., Lifshits, E.M. (1987) *The Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics*, vol. 2 (Fourth revised English ed.), Butterworth-Heinemann, Amsterdam.
- [28] Lehner, G. (2010) *Electromagnetic Field Theory for Engineers and Physicists*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [29] Lorentz, H.A. (1895) *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. Leiden, E. J. Brill.
- [30] Lorentz, H.A. (1899) Simplified Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Systems, *Proc. Royal Neth. Acad. Arts Sci.* (1) 427–442.
- [31] Lorentz, H.A. (1903) Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, 145–280.
- [32] Lorentz, H.A. (1904) Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, *Proc. Royal Neth. Acad. Arts Sci.*, (6) 809–831.
- [33] Minkowski, H. (1908) Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.

- [34] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. (1973) *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco.
- [35] Panofsky, W.K.H., Phillips, M. (1962) *Classical Electricity and Magnetism*, second ed., Addison-Wesley, Reading, MA.
- [36] Poincaré, H. (1906) Sur la dynamique de l'électron, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **21** 129–176.
- [37] Post, E. (1962) *Formal Structure of Electromagnetics*, North Holland, Amsterdam.
- [38] Purcell, E.M. (1965) *Berkeley Physics Course*. Vol. 2, McGraw-Hill, NY.
- [39] Romano, G. (2007) *Continuum Mechanics on Manifolds*, Lecture notes, University of Naples Federico II, Italy. <http://wpage.unina.it/romano>
- [40] Romano, G., Barretta, R. (2011) Covariant hypo-elasticity, *Eur. J. Mech. A Solids*, 30 (6) 1012–1023.
- [41] Romano G., Barretta R. (2012) Geometric Constitutive Theory and Frame Invariance, *Int. J. Non-Linear Mech.*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.12.006>
- [42] Romano, G. (2012) On the Laws of Electromagnetic Induction, *arXiv: 1105.3340*. Published on-line by IOP 1–67. <http://eprintweb.org/S/article/math-ph/1105.3340>
- [43] Romano, G., Barretta, R. (2013) On Euler's Stretching Formula in Continuum Mechanics, *Acta Mech.*, 224, 211–230.
- [44] Romano, G. (2013) On Electromagnetic Entanglements under Changes of Frame, *Rendiconti Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche, Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli*, 1–20. <http://wpage.unina.it/romano>
- [45] Romano, G., Barretta, R., Diaco, M. (2014) Geometric Continuum Mechanics, *Meccanica*, 49 (1) 111–133, 2014. doi: 10.1007/s11012-013-9777-9
- [46] Romano, G. (2014) On length and time in special relativity.
- [47] Sadiku, M.N.O. (2010) *Elements of Electromagnetics*. Oxford University Press, USA.
- [48] Schouten, J.A. (1951) *Tensor Analysis for Physicists*, Oxford University Press, London.
- [49] Thomson, J.J. (1881) On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies, *The London Phil. Mag. and J. of Science*. 5 11 (68) 229–249.
- [50] Thomson, J.J. (1893) *Notes on recent researches in electricity and magnetism, intended as a sequel to Professor Clerk-Maxwell's 'Treatise on Electricity and Magnetism'*, Macmillan and Co. London.
- [51] Tonti, E. (1995) *On the Geometrical Structure of the Electromagnetism*, Ed. Ferrarese, Pitagora Bologna, 281–308.

- [52] Tonti, E. (2002) Finite Formulation of Electromagnetic Field, *IEEE Transaction on Magnetics* **38** (2) 333–336.
- [53] Truesdell, C., Toupin, R. (1960) *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, band III/1, Springer-Verlag, Berlin.
- [54] Wegner, F. (2003) *Classical Electrodynamics*. Lecture Notes, Institut für Theoretische Physik, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg.
- [55] Voigt, W. (1887) On the Principle of Doppler, *Göttinger Nachrichten*, (7) 41–51.
- [56] Weyl, H. (1922) *Raum-Zeit-Materie*, Springer, Berlin, 1922. French transl.: *Temps-Espace-Matière*, Blanchard, Paris 1922. English transl.: *Space-Time-Matter*, Dover, New York 1950.

A priori estimate for a class of hyperbolic equations with double characteristics

Nota di Annamaria Barbagallo¹ e Vincenzo Esposito¹

Presentata dal socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 2 maggio 2014)

Key words: Sobolev spaces, hyperbolic equations.

Abstract - The aim of the paper is to provide a priori estimate for solutions of a class of hyperbolic equations depending on a parameter $(-\partial_t^2 + \partial_{x_1}^2 + (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \partial_{x_2}^2)u = f$ related to a Cauchy-Dirichlet problem.

1 - INTRODUCTION

Let us consider a class of hyperbolic operators with respect to time t with double characteristics of the type

$$P = -\partial_t^2 + \partial_{x_1}^2 + (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \partial_{x_2}^2, \quad (1)$$

where λ is a positive parameter in the following set

$$\Omega =]0, +\infty[\times]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[=]0, +\infty[\times]a, b[.$$

We set $\partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ where

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(t, x) = (t, x_1, x_2) \in \partial\Omega : t = 0, x \in [a, b]\}, \\ S_1 &= \{(t, x) = (t, x_1, x_2) \in \partial\Omega : x_1 = a_1, \text{ or } x_1 = b_1, t \in [0, +\infty[, x_2 \in [a_2, b_2]\}, \\ S_2 &= \{(t, x) = (t, x_1, x_2) \in \partial\Omega : x_2 = a_2, \text{ or } x_2 = b_2, t \in [0, +\infty[, x_1 \in [a_1, b_1]\}. \end{aligned}$$

In this note, we consider the Cauchy-Dirichlet problem for the equation

$$Pu = f, \quad \text{in } \Omega,$$

¹Department of Mathematics and Applications "R. Caccioppoli", University of Naples "Federico II", Via Cintia - Monte S. Angelo, 80126 Napoli, Italy. annamaria.barbagallo@unina.it, vincenzo.esposito7@unina.it

unlike what was done in (Esposito, 1999), where the Cauchy problem in the half-space $M =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$ has been studied. More precisely, in (Esposito, 1999) a priori estimates have been obtained in $\overline{M}$ for functions u belonging to $C_0^\infty(\overline{M})$, namely the space of the restrictions to $\overline{M}$ of functions belonging to $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3) : \text{supp } \varphi \text{ is compact}\}$, such that $u|_{\partial M} = 0$ or $\partial_\nu u|_{\partial M} = 0$. This assumption is enough restrictive when you prove existence and uniqueness results.

The function α is assumed to be C^∞ . Moreover, putting $g(x_1) = \frac{\alpha(x_1)}{\alpha'(x_1)}$, $h(x_1) = \frac{\alpha''(x_1)\alpha(x_1)}{[\alpha'(x_1)]^2}$, we suppose

- (i) $g, h \in C^\infty$, $h(x_1) \in [h_1, h_2]$, with $0 < h_1 < h_2 < 4$;
- (ii) $g(a_1) \leq 0$ and $g(b_1) \geq 0$;
- (iii) $|g(x_1)| \leq \lambda$, $\forall x_1 \in [a_1, b_1]$.

It is worth to remark that in the study of hyperbolic operators considered in this note, the major difficulties in order to establish a priori estimates regard the case in which the function $\beta(t, \lambda, x_1) = t + \lambda - \alpha(x_1)$ assumes positive and negative values in $\overline{\Omega}$.

Example 1. Let us note that the functions $\alpha(x_1) = x_1^n$, with $n \in \mathbb{N}$, in $[a_1, b_1]$, satisfies the assumption (i). We remark that, if $a_1 \leq 0$ and $b_1 > 0$, it is easy to show that the assumption (ii) is ensured. Moreover, the assumption (iii) is verified if $-n\lambda \leq a_1 < b_1 \leq n\lambda$. Finally, if we impose $-n\lambda \leq a_1 \leq 0$ and $\sqrt[n]{\lambda} < b_1 \leq n\lambda$, it results that the function β assumes positive and negative values in $\overline{\Omega}$. Moreover, for n even if $-n\lambda \leq a_1 < -\sqrt[n]{\lambda}$ and $\sqrt[n]{\lambda} < b_1 \leq n\lambda$ we have two intervals in which the function β assumes negative values.

Example 2. Let us consider, now, $\alpha(x_1) = e^{x_1}$, in $[a_1, b_1]$, verifies the assumption (i). If we suppose that $a_1 = 0$ and $b_1 > 0$, also the assumption (ii) is trivially satisfied. Moreover, if $\lambda \geq 1$ then the assumption (iii) is ensured. At last, the function β assumes positive and negative values in $\overline{\Omega}$ if $\log \lambda < b_1$.

Let us remark that assumption (ii) needs to the well-posedness of the problem for Dirichlet conditions. Because if we consider the Cauchy problem in the semispace, we can certainly overlook this assumption. The assumption (iii) is sufficient to ensure the well-posedness of the problem. In such a way, we can eliminate the restrictive assumptions made in (Esposito, 1999), where some priori estimates are obtained supposing that $u|_{\partial M} = 0$ or $\partial_{x_0} u|_{\partial M} = 0$. More precisely in this paper we consider the following Cauchy-Dirichlet problem in the set Ω :

$$\begin{cases} Pu = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{du}{d\nu}|_{S_0} = 0 \end{cases},$$

where $f \in W^{r,2}(\Omega)$, with $r \geq 2$, and $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$ is an external normal vector to the boundary $\partial\Omega$.

Fixed λ , let us denote by $p(t, x, \xi) = -\xi_0^2 + \xi_1^2 + (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \xi_2^2$ the symbol of P , by Σ the characteristic set

$$\Sigma = \{\rho = (t, x, \xi) \in T^*\Omega : p(\rho) = 0, \nabla p(\rho) = 0\},$$

and by F_p the fundamental matrix of p , namely

$$F_p(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \xi} & \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x} & -\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial x} \end{pmatrix}, \quad \forall \rho \in \Sigma.$$

The Cauchy problem for hyperbolic operators with double characteristics has been widely studied by many authors either in the case $F_p(\rho)$ has two real nonzero eigenvalues $\forall \rho \in \Sigma$ or in the case in which all the nonzero eigenvalues of $F_p(\rho)$ are purely imaginary numbers, $\forall \rho \in \Sigma$ (see for instance (Bernardi et al., 1993; Hörmander, 1977; Ivrii-Petkov, 1974; Iwasaki, 1983; Melrose, 1983, 1984; Nishitani, 1991, 1984)). It is well again observe that for the operators P considered in this paper, $F_p(\rho)$ can have both two distinct real eigenvalues and all the purely imaginary eigenvalues. For example, if $\alpha(x_1) = x_1^2$ and $\beta = 0$, for $|x_1| < \frac{1}{2}$, then $F_p(\rho)$ has two distinct nonzero real eigenvalues, instead for $|x_1| > \frac{1}{2}$ and $\beta = 0$, $F_p(\rho)$ has two nonzero imaginary eigenvalues.

It is worth to remark that classes of hyperbolic operators studied in the cited papers do not contain operators as in (1) when the function β assumes positive and negative values in Ω .

Let us denote by $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ the space of the restrictions to $\overline{\Omega}$ of functions belonging to $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Let us set

$$V = \left\{ u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : \frac{d^h u}{dy^h} \Big|_{S_1 \cup S_2} = 0, \forall h \neq 1 \right\},$$

$$K = [0, k] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [0, k] \times [a, b],$$

and

$$V_K = \{u \in V : \text{supp } u \subseteq K\}.$$

We remark that in (Esposito, 1999) the assumption $\frac{d^h u}{dy^h} \Big|_{S_1 \cup S_2} = 0$ is not considered since in the paper $u \in C_0^\infty(\overline{M})$ and, hence, $\partial^\alpha u$ vanishes per $|x|$ large enough, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$. In this note we assume that the assumption $\frac{d^h u}{dy^h} \Big|_{S_1 \cup S_2} = 0$ is verified for $h \neq 1$ because it needs to prove the Dirichlet condition in $S_1 \cup S_2$.

In this paper, we prove a fundamental priori estimate that is necessary to obtain existence and uniqueness results (see for instance (Esposito, 1999)). In particular, under the assumptions (i), (ii) and (iii), we prove that

$$\|u\|_{W^{r,2}} \leq c \|Pu\|_{W^{r,2}}, \quad \forall u \in V_K.$$

In a next paper, we will show existence and uniqueness results for such the class of hyperbolic operators.

The paper is organized as follows. Section 2 is devoted to some preliminary notations. In Section 3 a priori estimates are obtained.

2 - NOTATIONS AND PRELIMINARIES

Let $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^3$. We denote by ∂^α the derivative of order $|\alpha|$, while $\partial_{x_j}^h$ means, as usually, the derivative of order h with respect to x_j .

Let us denote by $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{W^{r,2}}$ ($r \in \mathbb{N}_0$) the L^2 -scalar product, the L^2 -norm and the $W^{r,2}$ -norm, respectively.

For each $K = [0, k] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \overline{\Omega}$ compact set, , for a fixed $k > 0$, let us denote by $C_0^\infty(K)$ the set of functions $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ that vanish for $t > k$.

3 - MAIN RESULTS

Lemma 1. *Let $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ and let $p, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0$. Then*

$$\|t^{\frac{p}{2}} \partial^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} u\| \leq \frac{2}{p+1} \|t^{\frac{p+2}{2}} \partial^{\alpha_0+1, \alpha_1, \alpha_2} u\|. \quad (2)$$

Proof. Let $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ and let $p, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0$. Being

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \partial_t (t^{p+1} (\partial^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} u)^2) dx \\ &= (p+1) \int_{\Omega} t^p (\partial^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} u)^2 dx + 2 \int_{\Omega} t^{p+1} \partial^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} u \partial^{\alpha_0+1, \alpha_1, \alpha_2} u dx, \end{aligned}$$

it results

$$\|t^{\frac{p}{2}} \partial^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} u\|^2 \leq \frac{2}{p+1} \|t^{\frac{p+2}{2}} \partial^{\alpha_0+1, \alpha_1, \alpha_2} u\| \|t^{\frac{p}{2}} \partial^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} u\|,$$

which implies (2). $\square$

Now, we are able to prove our main result.

Lemma 2. *Let $K = [0, k] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ be a compact subset of $\overline{\Omega}$, for a fixed $k > 0$. Let us suppose that g, h satisfy (i), (ii) and (iii). Then there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\begin{aligned} \|\partial_t u\|_{L^2(K)} + \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(K)} + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_1} u\|_{L^2(K)} &\leq c \|Pu\|_{L^2(K)}, \\ \forall u \in C_0^\infty(K) : u|_{S_1 \cup S_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Proof. Let us integrate by part in the scalar product and taking into account that $u|_{S_1 \cup S_2} = 0$,

$$\begin{aligned}
 2((t + \lambda)\partial_t u, Pu) &= \|\partial_t u\|^2 + \int_{S_0} \lambda(\partial_t u)^2 dx + \|\partial_{x_1} u\|^2 \\
 &\quad + 2 \int_{S_1} (t + \lambda) \nu_1 \partial_{x_1} u \partial_t u dx_2 dt + \int_{S_0} \lambda(\partial_{x_1} u)^2 dx \\
 &\quad + ((t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \partial_{x_2} u, \partial_{x_2} u) \\
 &\quad + 2 \int_{S_2} (t + \lambda)(t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \nu_2 \partial_{x_2} u \partial_t u dx_1 dt \\
 &\quad + 2((t + \lambda - \alpha(x_1))(t + \lambda) \partial_{x_2} u, \partial_{x_2} u) \\
 &\quad + \int_{S_0} \lambda(\lambda - \alpha(x_1))^2 (\partial_{x_2} u)^2 dx \\
 &= \|\partial_t u\|^2 + \int_{S_0} \lambda(\partial_t u)^2 dx + \|\partial_{x_1} u\|^2 + \int_{S_0} \lambda(\partial_{x_1} u)^2 dx \\
 &\quad + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} u\|^2 + 2((t + \lambda - \alpha(x_1))(t + \lambda) \partial_{x_2} u, \partial_{x_2} u) \\
 &\quad + \int_{S_0} \lambda(\lambda - \alpha(x_1))^2 (\partial_{x_2} u)^2 dx. \tag{4}
 \end{aligned}$$

On the other hand, by integrating by parts in the scalar product and making use of the assumption $u|_{S_1 \cup S_2} = 0$, it results

$$\begin{aligned}
 2(g(x_1) \partial_{x_1} u, Pu) &= 2 \int_{S_0} g(x_1) \partial_t u \partial_{x_1} u dx - (g'(x_1) \partial_t u, \partial_t u) \\
 &\quad + \int_{S_1} g(x_1) \nu_1 (\partial_t u)^2 dx_2 dt - (g'(x_1) \partial_{x_1} u, \partial_{x_1} u) \\
 &\quad + \int_{S_1} g(x_1) \nu_1 (\partial_{x_1} u)^2 dx_2 dt + \int_{S_2} (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \nu_2 \partial_{x_2} u \partial_{x_1} u dx_1 dt \\
 &\quad - \int_{S_1} g(x_1) (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \nu_1 (\partial_{x_2} u)^2 dx_2 dt + (g'(x_1) (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \partial_{x_2} u, \partial_{x_2} u) \\
 &\quad - 2(g(x_1) \alpha'(x_1) (t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} u, \partial_{x_2} u) \\
 &= 2 \int_{S_0} g(x_1) \partial_t u \partial_{x_1} u dx - (g'(x_1) \partial_t u, \partial_t u) - (g'(x_1) \partial_{x_1} u, \partial_{x_1} u) \\
 &\quad + \int_{S_1} g(x_1) \nu_1 (\partial_{x_1} u)^2 dx_2 dt + (g'(x_1) (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \partial_{x_2} u, \partial_{x_2} u) \\
 &\quad - 2(g(x_1) \alpha'(x_1) (t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} u, \partial_{x_2} u). \tag{5}
 \end{aligned}$$

By adding (4) and (5) and taking into account that (i), (ii) and (iii), we get

$$\begin{aligned}
 &\|(h(x_1))^{\frac{1}{2}} \partial_t u\|^2 + \|(h(x_1))^{\frac{1}{2}} \partial_{x_1} u\|^2 + \|(4 - h(x_1))^{\frac{1}{2}} (t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} u\|^2 \\
 &\leq 2((t + \lambda) \partial_t u + g(x_1) \partial_{x_1} u, Pu),
 \end{aligned}$$

from which and by assumption (i), it results

$$\|\partial_t u\| + \|\partial_{x_1} u\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} u\| \leq c \|Pu\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(K),$$

where the constant c depends on the compact set K . $\square$

Let us remind that

$$V = \left\{ u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : \frac{d^h u}{dy^h} \Big|_{S_1 \cup S_2} = 0 \ \forall h \neq 1 \right\},$$

$$K = [0, k] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [0, k] \times [a, b],$$

and

$$V_K = \{ u \in V : \text{supp } u \subseteq K \}.$$

Now, we prove the following fundamental result very useful in order to show some existence theorems.

Theorem 1. *Let $r \in \mathbb{N}_0$ and $K = [0, k] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Let us suppose that g, h satisfy (i), (ii) and (iii). Then, there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|u\|_{W^{r,2}} \leq c \|Pu\|_{W^{r,2}}, \quad \forall u \in V_K. \quad (6)$$

Proof. First of all, we remark that $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ and $\text{supp } v \subseteq K$, by using Lemma 1 for $p = 0$ we have:

$$\|v\| \leq c \|v_t\|. \quad (7)$$

We rewrite (3) for $\partial_{x_2 x_2}^2 u$, obtaining:

$$\|\partial_{tx_2 x_2}^3 u\| + \|\partial_{x_1 x_2 x_2}^3 u\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2 x_2 x_2}^3 u\| \leq c \|\partial_{x_2 x_2}^2 Pu\|, \quad \forall u \in V_K. \quad (8)$$

Making use of (7) and (8), setting $v = \partial_{x_2 x_2}^2 u$ in (7), we have

$$\|\partial_{x_2 x_2}^2 u\| \leq c \|\partial_{x_2 x_2}^2 Pu\|, \quad \forall u \in V_K. \quad (9)$$

Now, we rewrite (3) for $\partial_t u$, it results

$$\begin{aligned} \|\partial_{tt}^2 u\| + \|\partial_{tx_1}^2 u\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{tx_2}^2 u\| &\leq c \|P \partial_t u\|, \\ &\leq c (\|\partial_t Pu\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2 x_2}^2 u\|), \\ &\forall u \in V_K. \end{aligned} \quad (10)$$

From (9) and (10), it follows

$$\|\partial_{tt}^2 u\| + \|\partial_{tx_1}^2 u\| + \|\partial_{x_2 x_2}^2 u\| \leq c \|Pu\|_{W^{2,2}}, \quad \forall u \in V_K. \quad (11)$$

Taking into account of (11) and the equality $\partial_{x_1 x_1}^2 u = Pu + \partial_{tt}^2 u - (t + \lambda - \alpha(x_1))^2 \partial_{x_2 x_2}^2 u$, we get

$$\|\partial_{tt}^2 u\| + \|\partial_{x_1 x_1}^2 u\| + \|\partial_{x_2 x_2}^2 u\| + \|\partial_{tx_1}^2 u\| \leq c \|Pu\|_{W^{2,2}}, \quad \forall u \in V_K. \quad (12)$$

By applying (3) to $\partial_{tx_2}^2 u$, we have

$$\|\partial_{tx_2 x_2}^3 u\| \leq c \left(\|\partial_{tx_2}^2 Pu\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2 x_2 x_2}^3 u\| \right) \quad (13)$$

Making use of (13), (7) and (8), we get

$$\|\partial_{Ix_2}^2 u\| \leq c\|Pu\|_{W^{2,2}}, \quad \forall u \in V_K. \quad (14)$$

Taking into account (12), (14) and the following equality:

$$\|\partial_{x_1 x_2}^2 u\|^2 = (\partial_{x_1 x_1}^2 u, \partial_{x_2 x_2}^2 u),$$

we obtain

$$\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\| \leq c\|Pu\|_{W^{2,2}}, \quad \forall u \in V_K. \quad (15)$$

We set $v = \partial_{x_2} u$ and, then, $v = u$ in (7), we have, respectively:

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_2} u\| &\leq c\|\partial_{Ix_2}^2 u\|, \\ \|u\| &\leq c\|\partial_t u\| \end{aligned}$$

By using the previous inequalities, (15) and (3), it results

$$\|u\|_{W^{r,2}} \leq c\|Pu\|_{W^{r,2}}, \quad \forall u \in V_K, \quad \forall r \leq 2. \quad (16)$$

Now, we can proceed in the following way. At first, we rewrite (3) for $\partial^\alpha u$, with $\alpha = (0, 0, \alpha_2)$, $2 \leq \alpha_2 \leq r$, $r > 2$, by obtaining

$$\|\partial_t \partial^\alpha u\| + \|\partial_{x_1} \partial^\alpha u\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} \partial^\alpha u\| \leq c\|P \partial^\alpha u\| \leq c\|\partial^\alpha Pu\|, \quad \forall u \in V_K. \quad (17)$$

From (7), we have

$$\|\partial^\alpha u\| \leq c\|\partial^\alpha Pu\|, \quad \forall u \in V_K. \quad (18)$$

By writing (3) for $\partial^\alpha u$, with $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $2 \leq \alpha_2 \leq r-1$, $\alpha_1 \geq 2$ and $\alpha_0 + \alpha_1 = p > 1$, we get

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \partial^\alpha u\| + \|\partial_{x_1} \partial^\alpha u\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} \partial^\alpha u\| \leq c\|P \partial^\alpha u\| \\ &\leq c\|\partial^\alpha Pu\| + c \sum_{\alpha'_0 + \alpha'_1 = p-1} \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial^{\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha_2+2} u\| \\ &+ c \sum_{\alpha'_0 + \alpha'_1 = p-2} \|\partial^{\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha_2+2} u\|, \quad \forall u \in V_K. \end{aligned} \quad (19)$$

By using (19), (17), (18) and the following equality

$$\|\partial^{\alpha_0, 1, \alpha_2} u\|^2 = (\partial^{\alpha_0, 0, \alpha_2+1} u, \partial^{\alpha_0, 2, \alpha_2-1} u), \quad \forall \alpha_0, \alpha_2 \geq 2,$$

we have

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \partial^\alpha u\| + \|\partial_{x_1} \partial^\alpha u\| + \|(t + \lambda - \alpha(x_1)) \partial_{x_2} \partial^\alpha u\| \\ &\leq \|Pu\|_{W^{r,2}} + c \sum_{\alpha'_0 + \alpha'_1 = p-2} \|\partial^{\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha_2+2} u\|, \\ &\forall \alpha : |\alpha| \leq r, \quad 2 \leq \alpha_2 \leq r-1, \quad p = \alpha_0 + \alpha_1 \geq 1. \end{aligned}$$

Making use of the last inequality and taking into account of (17), (18) and (16), we obtain the claim. $\square$

References

- E. Bernardi, A. Bove, C. Parenti, *Geometric results for a class of hyperbolic operators with double characteristics*, J. Funct. Anal. **116** (1993), 62–82.
- V. Esposito, *On the Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with double characteristics. A priori estimates and existence results*, Ricerche Mat. **48** (1999), 305–322.
- L. Hörmander, *The Cauchy problem for differential equations with double characteristics*, J. Anal. Math. **32** (1977), 118–196.
- V.I. Ivrii, V.M. Petkov, *Necessary conditions for well-posedness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations*, Russian Math. Surveys **29** (1974), 1–70.
- N. Iwasaki, *The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations (a special case)*, J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 503–562.
- R.B. Melrose, *The Cauchy problem for effectively hyperbolic operators*, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 371–391.
- R.B. Melrose, *The Cauchy problem and propagations of singularities*, Seminar on Non-linear Partial Differential Equations, (S.S. Chen ed.) **2**, Springer-Verlag, M.S.R. Publications, 1984, 185–201.
- T. Nishitani, *The effectively hyperbolic Cauchy problem*, Lecture Notes in Mathematics, **1505** (1991), 71–167.
- T. Nishitani, *Local energy integral for effectively hyperbolic operators*, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 623–658, 659–666.

A remark on the dual of the Steenrod algebra

Luciano Amito Lomonaco¹

Presentata dal socio Francesco de Giovanni
(Adunanza del 2 Maggio 2014)

Key words: cohomology operations, Steenrod algebra, invariant theory.

Abstract - Let A_* be the dual of the mod 2 Steenrod algebra and let Δ_m be the ring of finite Laurent series on m generators, of degree 1. In this paper we consider the map $\omega_m : A_* \rightarrow \Delta_m$ introduced in [1] and explicitly compute some elements of $\text{im } \omega_m$. Moreover, we study how the elements $\omega_m(\xi_1)$ are related.

Riassunto - Sia A_* l'algebra di Steenrod duale mod 2 e sia Δ_m l'anello delle serie di Laurent finite su m generatori, di grado 1. In questa nota si considera l'omomorfismo $\omega_m : A_* \rightarrow \Delta_m$ introdotto in [1] e si calcolano in modo esplicito alcuni elementi di $\text{im } \omega_m$. Si studia inoltre il modo in cui gli elementi $\omega_m(\xi_1)$ sono correlati, al variare di m .

1 Background

We refer to [3] for the definition, notation and main classical results about the mod 2 Steenrod algebra A and its dual A_* . In particular, we recall that

$$A_* = \mathbb{F}_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$$

where each generator ξ_k is assigned degree $1 - 2^k$. For each $s \in \mathbb{N}$, we consider the polynomial ring

$$P_s = \mathbb{F}_2[t_1, \dots, t_s]$$

¹Department of Mathematics and Applications, University of Naples Federico II

on the indeterminates $t_1, \dots, t_s$, which are assigned degree 1. We consider the element e_s obtained as the product of all the non trivial elements of degree 1 in P_s , and the localization Φ_s of P_s out of e_s . Formally, we invert e_s :

$$\Phi_s = e_s^{-1} P_s .$$

There is a natural action of the general linear group $GL_s = GL_s(\mathbb{F}_2)$ upon P_s , and such action extends to an action on Φ_s . The rings of invariants of P_s and Φ_s under such action have been extensively studied, see for instance [2]. If we write T_s for the upper triangular subgroup of the general linear group, we have

$$\Phi_s^{T_s} := \Delta_s = \mathbb{F}_2[v_1^{\pm 1}, \dots, v_s^{\pm 1}] ,$$

where each v_i has degree 1, and

$$\Phi_s^{GL_s} := \Gamma_s = \mathbb{F}_2[Q_{s,0}^{\pm 1}, Q_{s,1}, \dots, Q_{s,s-1}] ,$$

where $Q_{s,j}$ has degree $2^s - 2^j$, and in fact $Q_{s,0} = e_n$. For more details, and in particular for the formulas which provide an expression of $Q_{s,j}$ and v_j in terms of the indeterminates t_j , see [2]. Conventionally, we set $Q_{s,j} = 0$ when $s < j$, $s < 0$ or $j < 0$ and $Q_{s,s} = 1$ for each nonnegative s .

2 Computation

A homomorphism

$$\omega_m : A_* \rightarrow \Delta_m$$

has been introduced in [1] in a geometrical manner, using cohomology operations. It turns out that

$$\omega_m(\xi_j) = Q_{m,0}^{-1} Q_{m,j} .$$

We wish to work out some explicit computation in order to express such elements in terms of the generators $v_1, \dots, v_m \in \Delta_m$.

REMARK. If we consider a monomial of the form $v_1^{i_1} \cdots v_h^{i_h} \in \Delta_m$, with $m > h$, we write $v_1^{i_1} \cdots v_h^{i_h} v_{h+1}^0 \cdots v_m^0$, in order to distinguish it from the monomial $v_1^{i_1} \cdots v_h^{i_h} \in \Delta_h$.

LEMMA. $Q_{s,j} = Q_{s-1,0} Q_{s-1,j} v_s + Q_{s-1,j-1}^2 v_s^0$.

Proof. We use the notation of [2]. We have $Q_{s,j} = Q_{s-1,0} V_s + Q_{s-1,j-1}^2$, see [2], formula (2.6). Moreover

$$Q_{s,0} = V_1 V_2 \cdots V_s$$

and

$$v_1 = V_1 ; v_2 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{Q_{1,0}} ; \dots ; v_s = \frac{V_s}{V_1 V_2 \dots V_{s-1}} = \frac{V_s}{Q_{s-1,0}} .$$

In other words $v_k = Q_{k-1,0}^{-1} V_k$, or $V_k = Q_{k-1,0} v_k$. The result follows. $\square$

For example, we have $Q_{1,0} = v_1 = V_1$, $Q_{2,0} = Q_{1,0}^2 v_2 = v_1^2 v_2$, $Q_{2,1} = Q_{1,0} v_2 + Q_{1,0}^2 v_2^0 = v_1 v_2 + v_1^2 v_2^0 = v_1(v_1 + v_2)$.

THEOREM. For each $s > 0$, $Q_{s+1,0} = v_1^{2^s} v_2^{2^{s-1}} \dots v_s^2 v_{s+1}$.

Proof. This is an easy induction. We have already pointed out that $Q_{1,0} = v_1$, $Q_{2,0} = v_1^2 v_2$. Assume, inductively, that $Q_{s,0} = v_1^{2^{s-1}} \dots v_{s-1}^2 v_s$. Then, using the Lemma, we have

$$Q_{s+1,0} = Q_{s,0}^2 v_{s+1} .$$

The result follows. $\square$

We are now interested in describing the invariant $\omega_m(\xi_1)$, for each $M \in \mathbb{N}$. Clearly $\omega_1(\xi_1) = Q_{1,0}^{-1} = v_1^{-1}$, and $\omega_2(\xi_1) = Q_{2,0}^{-1} Q_{2,1} = v_1^{-2} v_2^{-1} \cdot (v_1^2 + v_1 v_2) = v_1^0 v_2^{-1} + v_1^{-1} v_2^0$. More generally, by proposition 3.3 of [1], applied to the case $k = 1$, we have

$$\omega_m(\xi_1) = \sum_{i=1}^m v_1^0 \dots v_i^{-1} \dots v_m^0 .$$

The following statement easily follows.

THEOREM. The coefficient of v_m^0 in $\omega_m(\xi_1)$ is exactly $\omega_{m-1}(\xi_1)$.

Proof. This is just a comparison between $\omega_m(\xi_1)$ and $\omega_{m-1}(\xi_1)$. $\square$

In other words, if we consider the tower

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\downarrow \\
\Gamma_{m+1} \subset \Delta_{m+1} \\
\downarrow R_m^* \\
\Gamma_m \subset \Delta_m \\
\downarrow R_{m-1}^* \\
\Gamma_{m-1} \subset \Delta_{m-1} \\
\downarrow \\
\vdots
\end{array}$$

where the vertical map R_m^* is the one which selects the coefficient of v_{m+1}^0 in each monomial of Δ_{m+1} , in the family $\{\omega_m(\xi_1)\}_{m \geq 1}$ we have that $R_m^* \omega_{m+1}(\xi_1) = \omega_m(\xi_1)$. In a sequel we will try to generalize the results found here for the generator ξ_1 in an appropriate setting.

References

- [1] Lomonaco, L.A.; *The iterated total squaring operation*, Proc. Amer. Math. Soc., 115(1992), 1149–1155.
- [2] Singer, W.M.; *Invariant theory and the lambda algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., 280(1983), 673–693.
- [3] Steenrod, N.E., Epstein, D.B.A.; *Cohomology operations*, Ann. of Math. Stud. no. 50, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1962.

Alcune considerazioni aritmetiche sull'ordine dei gruppi semplici di Suzuki.

Alma D'Aniello¹

Presentata dal socio Francesco de Giovanni
(Adunanza del 2 maggio 2014)

Key words: Finite simple groups, Suzuki groups, arithmetic problems.

Abstract - Let $\sigma(n)$ be the set of prime divisors of a positive integer n , and $s(m)$ the order of the Suzuki simple group $S_Z(2^{2m+1})$, $m \geq 0$. The main result of this paper is the following: $\sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m))$ if and only if $2n + 1$ divides $2m + 1$. In particular, it follows that, within the class of finite simple groups, the Suzuki groups are uniquely determined by the set of prime divisors of their order.

Riassunto - Sia $\sigma(n)$ l'insieme dei divisori primi di un intero positivo n , e $s(m)$ l'ordine del gruppo semplice di Suzuki $S_Z(2^{2m+1})$, $m \geq 0$. Il risultato principale di questo lavoro è il seguente: $\sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m))$ se e solo se $2n + 1$ divide $2m + 1$. Segue in particolare che, nella classe dei gruppi finiti semplici, i gruppi di Suzuki sono univocamente determinati dall'insieme dei divisori primi del loro ordine.

1 – INTRODUZIONE

Nella teoria dei gruppi finiti si presenta frequentemente il problema di individuare o caratterizzare classi di gruppi o singoli gruppi, quando si abbiano opportune informazioni sui divisori primi dell'ordine dei gruppi in esame. In tale contesto gli esempi più celebri sono senza dubbio il teorema di Burnside sulla risolubilità dei gruppi d'ordine $p^\alpha q^\beta$ (con p e q primi) (Burnside, 1904) e il fondamentale risultato di Feit e Thompson sulla risolubilità dei gruppi di ordine dispari (Feit, Thompson, 1963), che hanno occupato la scena della teoria dei gruppi per parecchi decenni. Per contro, si possono fornire numerosi esempi di problemi del tipo in questione, la cui soluzione è poco più che un facile esercizio. Ad esempio, è agevole provare che, se p e q sono primi distinti tali che p non divide $q - 1$ e

¹Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Complesso Monte S. Angelo, via Cintia - 80126 Napoli, Italy; e-mail: daniello@unina.it

q non divide $p - 1$, allora i gruppi supersolubili di ordine $p^\alpha q^\beta$ sono tutti e soli i gruppi nilpotenti di tale ordine.

Gli esempi citati coinvolgono, sia pure a livello di ben diverse difficoltà, concetti e strumenti propri della teoria dei gruppi. Ci sono, peraltro, vari problemi del tipo in questione, la cui natura è puramente aritmetica. Ad esempio, i gruppi d'ordine $2^{2\alpha} + 1$ sono individuati, modulo la loro classificazione, dai divisori primi del loro ordine, nel senso che l'insieme dei divisori primi di $2^{2\alpha} + 1$ coincide con quello dei divisori primi di $2^{2\beta} + 1$, se e solo se $\alpha = \beta$ (cfr. Proposizione 1).

Una situazione in qualche modo simile si presenta per alcuni gruppi semplici; ad esempio per i gruppi $PSL(2, p)$, con p primo ≥ 5 : se q è un primo, i divisori primi di $|PSL(2, q)|$ coincidono con i divisori primi di $|PSL(2, p)|$ se e solo se $q = p$. Non è difficile fornire altri esempi del tipo ora esposto.

In un precedente articolo (D'Aniello et al., 2006), che si colloca nell'ambito della teoria delle formazioni saturate, l'autore si è imbattuto in un problema di carattere aritmetico riguardante il gruppo di Suzuki $S_Z(2^3)$: esso è l'unico π -gruppo semplice non abeliano, dove $\pi = \{2, 5, 7, 13, p\}$, con p primo, $p \neq 3$.

In questo lavoro si ottengono alcuni risultati di natura aritmetica che permettono facilmente di generalizzare tale risultato a tutti i gruppi di Suzuki $S_Z(2^{2m+1})$ ($m > 0$), usando le stesse tecniche usate in (D'Aniello et al., 2006) per $S_Z(2^3)$. Tale risultato ha interessanti implicazioni nell'ambito di alcuni dei problemi riguardanti le formazioni saturate prese in considerazione in (D'Aniello et al., 2006).

Tutti i gruppi considerati sono finiti, le notazioni sono standard. In particolare, se n è un intero non negativo, $\sigma(n)$ denoterà l'insieme dei divisori primi di n . L'ordine del gruppo semplice di Suzuki $S_Z(2^{2m+1})$ ($m > 0$) (Suzuki, 1962) sarà denotato con $s(m)$:

$$s(m) := 2^{2(2m+1)}(2^{2(2m+1)} + 1)(2^{2m+1} - 1).$$

Il risultato principale è il seguente.

Teorema. *Siano m ed n interi positivi. Allora*

$$\sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m)) \text{ se e solo se } 2n + 1 \text{ divide } 2m + 1.$$

Da esso si deduce che, nella classe dei gruppi semplici, i gruppi di Suzuki sono univocamente individuati dall'insieme dei divisori primi del loro ordine.

2 – PRIMI RISULTATI

In questo paragrafo si forniscono alcuni risultati di carattere aritmetico come detto nell'Introduzione.

Lemma 1. *Siano n ed m interi positivi. Allora*

$$\sigma(2^n - 1) \subseteq \sigma(2^m - 1) \text{ se e solo se } n \text{ divide } m.$$

Dimostrazione. Se n divide m allora ovviamente $2^n - 1$ divide $2^m - 1$ e quindi $\sigma(2^n - 1) \subseteq \sigma(2^m - 1)$. Sia viceversa $\sigma(2^n - 1) \subseteq \sigma(2^m - 1)$. Allora, per il teorema di Zsigmondy (Kleidman, Liebeck, 1990, pag. 182), risulta $n < m$.

Si supponga ora che la condizione necessaria sia falsa e sia m minimo sotto le condizioni:

$$\sigma(2^n - 1) \subseteq \sigma(2^m - 1) \text{ e } n \text{ non divide } m.$$

L'ipotesi $\sigma(2^n - 1) \subseteq \sigma(2^m - 1)$ implica che

$$\sigma(2^n - 1) \subseteq \sigma(2^m - 2^n) = \{2\} \cup \sigma(2^{m-n} - 1).$$

Ne segue, poich  $2 \notin \sigma(2^n - 1)$, che $\sigma(2^n - 1) \subseteq \sigma(2^{m-n} - 1)$ contro la minimalit  di m . □

Lemma 2. Siano n ed m interi positivi dispari. Allora

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1) \text{ se e solo se } n \text{ divide } m.$$

Dimostrazione. La sufficienza della condizione   ovvia. Si supponga ora che la condizione necessaria sia falsa e siano n ed m minimi sotto le condizioni:

$$\sigma(4^n + 1) \subseteq \sigma(4^m + 1), \text{ } n \text{ ed } m \text{ dispari e } n \text{ non divide } m.$$

Si prova in primo luogo che n   una potenza di primo p^t e $m = p^{t-1}$, con $t > 0$. Se n'   un divisore proprio di n , allora n'   dispari (al pari di n) e di conseguenza $4^{n'} + 1$ divide $4^n + 1$; si ha allora

$$\sigma(4^{n'} + 1) \subseteq \sigma(4^n + 1) \subseteq \sigma(4^m + 1)$$

e la minimalit  di n implica che n' divide m . D'altro canto n non divide m e quindi n   a fortiori una potenza di primo p^t (con p primo $\neq 2$ e $t > 0$), e p^{t-1} divide m , cio  $m = p^{t-1}m'$, con $(m', p) = 1$. Resta da provare che $m' = 1$. A tale scopo sia q un divisore primo di $4^n + 1 = 4^{p^t} + 1$. Si ha allora

$$4^{p^t} \equiv -1 \pmod{q} \text{ e } 4^{2p^t} \equiv 1 \pmod{q};$$

ne segue, poich  $q \neq 2$, che $\exp(4, q)$ divide $2p^t$ e non divide p^t , sicch  $\exp(4, q) = 2p^{r_q}$, con $r_q \leq t$.

D'altro canto l'ipotesi $\sigma(4^n + 1) \subseteq \sigma(4^m + 1)$ implica, ragionando come sopra, che $\exp(4, q)$ divide $2m = 2p^{t-1}m'$ e non divide $p^{t-1}m' = m$; allora $\exp(4, q) = 2p^{r_q}$, con $r_q \leq t - 1$, e quindi q non divide $4^{p^{t-1}} - 1$. L'arbitrariet  di $q \in \sigma(4^n + 1)$ comporta che $(4^{p^t} + 1, 4^{p^{t-1}} - 1) = 1$ e

$$\sigma(4^n + 1) = \sigma(4^{p^t} + 1) \subseteq \sigma(4^{2p^{t-1}} - 1) = \sigma((4^{p^{t-1}} - 1)(4^{p^{t-1}} + 1));$$

ne segue

$$\sigma(4^n + 1) \subseteq \sigma(4^{p^{t-1}} + 1).$$

Allora, per la minimalit  di m , si ha $m' = 1$ e quindi $m = p^{t-1}$.

D'altro canto si ha

$$\sigma(4^{p^{t-1}} + 1) \subseteq \sigma(4^{p^t} + 1)$$

e quindi

$$\sigma\left(\frac{4^{p^t} + 1}{4^{p^{t-1}} + 1}\right) \subseteq \sigma(4^{p^t} + 1) = \sigma(4^{p^{t-1}} + 1). \quad (\alpha)$$

Con semplici calcoli si trova che

$$\frac{4^{p^t} + 1}{4^{p^{t-1}} + 1} = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (4^{p^{t-1}(p-(2k+1))} - 1) - \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} (4^{p^{t-1}(p-2h)} + 1) + p. \quad (\beta)$$

La (α) assicura che q divide $4^{p^{t-1}} + 1$; ne segue che q divide $4^{p^{t-1}(p-2h)} + 1$ (per ogni $h = 1, \dots, \frac{p-1}{2}$), perché $p - 2h$ è dispari, e q divide $4^{p^{t-1}(p-(2k+1))} - 1$, perché q divide $4^{2p^{t-1}} - 1$ e $p - (2k + 1)$ è pari (per ogni $k = 0, \dots, \frac{p-1}{2}$). Si ha allora che q divide

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (4^{p^{t-1}(p-(2k+1))} - 1) - \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} (4^{p^{t-1}(p-2h)} + 1);$$

ne segue, poiché q divide $\frac{4^{p^t} + 1}{4^{p^{t-1}} + 1}$, che $q = p$, per la (β) .

Si è in tal modo ottenuto che $\frac{4^{p^t} + 1}{4^{p^{t-1}} + 1}$ è una potenza p^b di p . Si ha allora che p divide $4^{p^t} + 1 (= 4^n + 1)$. D'altra parte (teorema di Fermat) p divide $4^{p-1} - 1$ e quindi p divide $4^{p^{t-1}} - 1$ (perché $p - 1$ divide $p^t - 1$). Si ha allora che p divide

$$4^{p^t} + 1 + (4^{p^{t-1}} - 1) = 4^{p^t} + 4^{p^{t-1}} = 5 \cdot 4^{p^{t-1}}$$

e quindi (essendo $p \neq 2$) si ha $p = 5$. Ne segue ovviamente $t > 1$. Si ha allora

$$4^{5^t} + 1 = (4^{5^{t-1}} + 1)5^b$$

da cui si ottiene

$$4^{5^t} - 4^{5^{t-1}} = (5^b - 1)(4^{5^{t-1}} + 1). \quad (\gamma)$$

D'altro canto si ha:

$$4^{5^t} - 4^{5^{t-1}} = 4^{5^{t-1}}(4^{4 \cdot 5^{t-1}} - 1) = 4^{5^{t-1}}(4^{5^{t-1} \cdot 2} + 1)(4^{5^{t-1}} - 1)(4^{5^{t-1}} + 1). \quad (\delta)$$

Allora da (γ) e (δ) si ottiene

$$5^b - 1 = 4^{5^{t-1}}(4^{5^{t-1} \cdot 2} + 1)(4^{5^{t-1}} - 1).$$

Ne segue che $\exp(5, 4^{5^{t-1}}) = 4^{5^{t-1}-1}$ divide b .

Si ha allora

$$5^{4^{5^{t-1}-1}} \leq 5^b = \frac{4^{5^t} + 1}{4^{5^{t-1}} + 1} = 4^{5^{t-1} \cdot 4} - 4^{5^{t-1} \cdot 3} + 4^{5^{t-1} \cdot 2} - 4^{5^{t-1}} + 1,$$

da cui, ovviamente, si ottiene

$$5^{4^{5^{t-1}-1}} < 4^{5^{t-1} \cdot 4} + 4^{5^{t-1} \cdot 2} + 1 < 5^{5^{t-1} \cdot 4} + 5^{5^{t-1} \cdot 4} = 2 \cdot 5^{5^{t-1} \cdot 4}$$

e quindi

$$5^{4^{5^{t-1}-1}-4 \cdot 5^{t-1}} < 2$$

che è palesemente falso, perché $t > 1$.

La contraddizione ottenuta fornisce l'asserto. $\square$

È immediato verificare che l'ipotesi che n ed m siano dispari è essenziale per la condizione sufficiente dell'enunciato del lemma precedente. La proposizione seguente generalizza la condizione necessaria dell'enunciato del Lemma 2 (cfr. Introduzione).

Proposizione 1. *Siano n ed m interi positivi. Se $\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1)$ allora n divide m .*

Dimostrazione. Si supponga l'asserto falso e siano n, m minimi sotto le condizioni : $\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1)$ e n non divide m . Il Lemma 2 assicura che n ed m non sono entrambi dispari. Distinguiamo due casi:

Caso 1: n dispari (m pari). 5 divide $2^{2n} + 1$ perché n è dispari, e 5 divide $2^{2(m-1)} + 1$ perché $m-1$ è dispari. Ne segue, poiché $\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1)$, che $5 \in \sigma(2^{2m} - 2^{2(m-1)}) = \sigma(2^{2(m-1)} \cdot 3) = \{2, 3\}$ e ciò è palesemente falso.

Caso 2: n pari. Si prova preliminarmente che n è una potenza di 2 oppure $n = 2^t q^s$, con q primo $\neq 2$, $s \geq 1$ e $t > 0$. Sia 2^t la massima potenza di 2 che divide n , allora $n = 2^t \cdot n'$, con n' dispari. Per assurdo n' non sia primario. Allora, per ogni divisore primario q^s di n' si ha :

$$2^{2n} + 1 = (2^{\frac{2n}{q^s}})^{q^s} + 1 = (2^{\frac{2n}{q^s}} + 1)k, \quad k > 0$$

e quindi

$$\sigma(2^{\frac{2n}{q^s}} + 1) \subseteq \sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1);$$

ne segue, per la minimalità di n , che $\frac{n}{q^s}$ divide m . L'arbitrarietà di q^s implica che n divide m , contro l'ipotesi. Pertanto $n = 2^t$ (con $t > 0$) oppure $n = 2^t q^s$, con q primo dispari, $s > 0$ e $t > 0$.

Ora la minimalità di n implica che, se $n = 2^t q^s$, allora $2^t q^{s-1}$ divide m , perché $\sigma(2^{2 \cdot 2^t q^{s-1}} + 1) \subseteq \sigma(2^{2 \cdot 2^t q^s} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1)$, sicché $n = 2^t q^s$ implica che

$$m = 2^l q^{s-1} m' \text{ con } l \geq t \text{ e } (m', q) = 1 = (m', 2).$$

Si premette ora quanto segue. Poiché $2^{2n} + 1$ divide $2^{4n} - 1$, si ha che

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{4nk} - 1), \text{ per ogni } k \geq 0;$$

ne segue che

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1 + 2^{4nk} - 1) = \sigma(2^{2m} + 2^{4nk}), \text{ per ogni } k \geq 0. \quad (\alpha)$$

Ora se $m > 2n$, si ha $m = 2nh + r$ (con $1 \leq r \leq 2n - 1$) e la (α) fornisce:

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 4^{4nh}) = \sigma(2^{4nh}(2^{2m-4nh} + 1))$$

da cui si ottiene

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2(m-2nh)} + 1);$$

ne segue, per la minimalità di m , che n divide $m - 2nh$ e quindi n divide m , contro l'ipotesi.

Si ha allora $m \leq 2n$ e quindi $m < 2n$ (perché n non divide m), e la (α) fornisce (per $k = 1$):

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m}(2^{4n-2m} + 1))$$

da cui si ottiene

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2(2n-m)} + 1);$$

allora, poiché n non divide $2n - m$, la minimalità di m assicura che $2n - m \geq m$, cioè $m \leq n$ e quindi $m < n$ (perché n non divide m). Si esaminano ora separatamente i due sottocasi $n = 2^t$ e $n = 2^t q^s$.

2a) $n = 2^t$ ($t > 0$). Poiché $n = 2^t$ non divide m , si ha $m = 2^s \cdot m'$ con $s < t$ e m' dispari. Sia $p \in \sigma(2^{2n} + 1) = \sigma(2^{2^{t+1}} + 1)$. Si ha ovviamente

$$2^{2^{t+1}} \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{e} \quad 2^{2^{t+2}} \equiv 1 \pmod{p};$$

ne segue che $\exp(2, p)$ divide 2^{t+2} e non divide 2^{t+1} , cioè $\exp(2, p) = 2^{t+2}$. Si ha allora, poiché p divide $2^{2m} + 1$ e quindi p divide $2^{4m} - 1$, che $2^{t+2} = \exp(2, p)$ divide $4m = 2^{s+2} \cdot m'$; ne segue $t + 2 \leq s + 2$, cioè $t \leq s$, che è falso.

2b) $n = 2^t q^s$; q primo $\neq 2$, $s, t > 0$. Si è già visto che $m = 2^l q^{s-1} m'$, con $l \geq t$ e $(q, m') = (2, m') = 1$ e che $m < n$. Sia $p \in \sigma(2^{2n} + 1)$. Si ha

$$2^{2n} \equiv -1 \pmod{p}$$

e quindi $\exp(2, p)$ divide $4n$ e non divide $2n$, sicché $\exp(2, p) = 2^{t+2} q^{r_p}$, con $r_p \leq s$. D'altro canto l'ipotesi $\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1)$ implica (ragionando come sopra) che $\exp(2, p)$ divide $4m$ e non divide $2m$; ne segue, ovviamente, $l = t$ e $r_p \leq s - 1$, sicché $m = 2^t q^{s-1} m'$ e $m' < q$ (perché $m < n$).

Si ponga ora

$$r = \max\{r_p | p \in \sigma(2^{2n} + 1)\}.$$

Si ha ovviamente:

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2^{t+2} q^r} - 1) = \sigma((2^{2^{t+1} q^r} - 1)(2^{2^{t+1} q^r} + 1)). \quad (\beta)$$

D'altro canto $(2^{2n} + 1, 2^{2^{t+1} q^r} - 1) = 1$, perché $\exp(2, p) = 2^{t+2} q^{r_p}$, $\forall p \in \sigma(2^{2n} + 1)$.

Allora la (β) implica che

$$\sigma(2^{2n} + 1) \subseteq \sigma(2^{2^{t+1} q^r} + 1).$$

Dalla minimalità di m , poiché $n = 2^t q^s$ non divide $2^t q^r$ ($r < s$), segue che

$$2^t q^r \geq m = 2^t q^{s-1} m'$$

e quindi, poiché $r \leq s-1$, si ottiene $m' = 1$, sicché $n = 2^t q^s = mq$, ($m = 2^t q^{s-1}$).

Si ha allora

$$\sigma(2^{2n} + 1) = \sigma(2^{2m} + 1)$$

e quindi

$$\sigma\left(\frac{2^{2mq} + 1}{2^{2m} + 1}\right) \subseteq \sigma(2^{2m} + 1). \quad (\gamma)$$

Si prova ora che $\frac{2^{2mq} + 1}{2^{2m} + 1}$ è una potenza di q . Con facili calcoli si ottiene

$$\frac{2^{2mq} + 1}{2^{2m} + 1} = \sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}} (2^{2m(q-(2k+1))} - 1) - \sum_{h=1}^{\frac{q-1}{2}} (2^{2m(q-2h)} + 1) + q. \quad (\delta)$$

Sia p un divisore primo di $\frac{2^{2mq} + 1}{2^{2m} + 1}$. La (γ) assicura che p divide $2^{2m} + 1$; di conseguenza p divide $2^{2m(q-(2k+1))} - 1$, per ogni $k = 0, \dots, \frac{q-1}{2}$ (perché $2^{4m} - 1$ divide $2^{2m(q-(2k+1))} - 1$) e p divide $2^{2m(q-2h)} + 1$, per ogni $h = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$ (perché $q - 2h$ è dispari). Si ha allora che p divide

$$\sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}} (2^{2m(q-(2k+1))} - 1) - \sum_{h=1}^{\frac{q-1}{2}} (2^{2m(q-2h)} + 1)$$

e quindi la (δ) assicura che $p = q$, sicché

$$\frac{2^{2mq} + 1}{2^{2m} + 1} = q^b \quad (\eta)$$

È pressoché immediato provare che $b > 1$. Usando ancora la (δ) si ottiene che $\frac{2^{2mq} + 1}{2^{2m} + 1} = (2^{2m} + 1)l + q$, con $l > 0$. Ne segue, per la (η) , che $q^b = (2^{2m} + 1)l + q$ e quindi $2^{2m} + 1$ divide $q^b - q = q(q^{b-1} - 1)$; di conseguenza, poiché $b > 1$, si ottiene che q è la massima potenza di q che divide $2^{2m} + 1$. Allora, posto $2^{2m} + 1 = q \cdot d$, con $(q, d) = 1$, si ha:

$$2^{2mq} + 1 = q^b (2^{2m} + 1) = q^{b+1} \cdot d, \quad (\theta)$$

e

$$2^{2m} = q \cdot d - 1.$$

Si ha allora:

$$2^{2mq} = (qd - 1)^q = \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} (qd)^i (-1)^{q-i} = -1 + \sum_{i=1}^q \binom{q}{i} (qd)^i (-1)^{q-i}$$

da cui si ottiene

$$2^{2mq} + 1 = \sum_{i=1}^q \binom{q}{i} (qd)^i (-1)^{q-i}.$$

Ne segue, usando la (θ) :

$$q^{b+1} \cdot d = \sum_{i=1}^q \binom{q}{i} (qd)^i (-1)^{q-i} = q^2 d + (qd)^q + \sum_{i=2}^{q-1} \binom{q}{i} (qd)^i (-1)^{q-i}$$

da cui

$$q^{b+1}d - q^2d = (qd)^q + \sum_{i=2}^{q-1} \binom{q}{i} (qd)^i (-1)^{q-i}$$

e quindi, dividendo per d :

$$q^{b+1} - q^2 = q^q d^{q-1} + \sum_{i=2}^{q-1} \binom{q}{i} q^i d^{i-1} (-1)^{q-i}$$

cioè

$$q^2(q^{b-1} - 1) = q^q d^{q-1} + \sum_{i=2}^{q-1} \binom{q}{i} q^i d^{i-1} (-1)^{q-i}. \quad (\xi)$$

Poiché q divide $\binom{q}{i}$ per ogni $i = 1, \dots, q-1$ è immediato osservare che q^3 divide il secondo membro di (ξ) , ma ciò è falso, perché $b > 1$. Le contraddizioni ottenute forniscono l'asserto. $\square$

Lemma 3. *Siano n ed m interi positivi dispari. Allora $(2^{2n} + 1, 2^m - 1) = 1$.*

Dimostrazione. Si assuma che l'asserto sia falso, e siano n, m minimi sotto la condizione che $(2^{2n} + 1, 2^m - 1) \neq 1$. Si esaminano separatamente i casi $2n > m$ e $2n < m$.

1) $2n > m$.

Sia $t = \text{rest}(2n, m)$: $2n = mk + t$, $0 \leq t \leq m-1$. Sia p un primo che divida $(2^{2n} + 1, 2^m - 1)$. Allora p divide

$$2^{2n} + 1 + 2^{km} - 1 = 2^{km+t} + 2^{km} = 2^{km}(2^t + 1).$$

Poiché $p \neq 2$, ne segue che p divide $2^t + 1$ e quindi $t > 0$. Ora p divide $2^m - 1 + 2^t + 1 = 2^t(2^{m-t} + 1)$ e p divide $2^m - 1 - 2^t - 1 = 2(2^{m-1} - 2^{t-1} - 1)$ e quindi

$$p \text{ divide } 2^{m-1} - 2^{t-1} - 1 \quad (\alpha)$$

e

$$p \text{ divide } 2^{m-t} + 1. \quad (\beta)$$

Da (α) e (β) segue che

$$p \text{ divide } 2^{m-t} + 1 + 2^{m-1} - 2^{t-1} - 1 = 2^{m-t} + 2^{m-1} - 2^{t-1}. \quad (\gamma)$$

Se $t-1 \leq m-t$, la (γ) implica che p divide $2^{t-1}(2^{m-2t+1} + 2^{m-t} - 1)$ e quindi p divide $2^{m-2t+1} + 2^{m-t} - 1 = 2^{m-2t+1} + 2^{m-t} + 1 - 2$; ne segue, poiché p divide $2^{m-t} + 1$ (cfr. (β)), che p divide $2^{m-2t+1} - 2$. Non può essere $m-2t+1 = 0$ altrimenti p dividerebbe -1 ; pertanto $m-2t+1 > 0$ e quindi $2^{m-2t+1} - 2 = 2(2^{m-2t} - 1)$. Ne segue che

$$p \text{ divide } 2^{m-2t} - 1. \quad (\delta)$$

Da $m-2t+1 > 0$, essendo m dispari, segue $m-2t+1 \geq 2$ e quindi $m-2t > 0$. L'essere $m-2t$ dispari e la (δ) contraddicono la minimalità di m .

Sia allora $t - 1 > m - t$. La (γ) implica che p divide

$$2^{m-t} + 2^{m-1} - 2^{t-1} = 2^{m-t}(1 + 2^{t-1} - 2^{2t-m-1})$$

e quindi p divide $2^{t-1} + 1 - 2^{2t-m-1}$; ne segue che p divide

$$2^t + 2 - 2^{2t-m} = 2^t + 1 - (2^{2t-m} - 1)$$

da cui, poiché p divide $2^t + 1$, si ottiene che p divide $2^{2t-m} - 1$ e ciò contraddice la minimalità di m .

2) $2n < m$.

Sia p un primo che divide $(2^{2n} + 1, 2^m - 1)$. Allora p divide $2^m + 2^{2n} = 2^{2n}(2^{m-2n} + 1)$ e quindi

$$p \text{ divide } 2^{m-2n} + 1. \quad (\eta)$$

Analogamente p divide $2^m - 1 - 2^{2n} - 1 = 2(2^{m-1} - 2^{2n-1} - 1)$ e quindi

$$p \text{ divide } 2^{m-1} - 2^{2n-1} - 1. \quad (\zeta)$$

Da (η) e (ζ) si ottiene che

$$p \text{ divide } 2^{m-2n} + 2^{m-1} - 2^{2n-1}. \quad (\xi)$$

Se $2n - 1 < m - 2n$, la (ξ) implica che p divide $2^{2n-1}(2^{m-4n+1} + 2^{m-2n} - 1)$ e quindi p divide $2^{m-4n+1} + 2^{m-2n} - 1 = 2^{m-4n+1} - 2 + 2^{m-2n} + 1$.

Ne segue, poiché p divide $2^{m-2n} + 1$ (cfr. (η)), che p divide $2^{m-4n+1} - 2$ da cui si deduce che p divide $2^{m-4n} - 1$ e si contraddice la minimalità di m .

Sia allora $2n - 1 \geq m - 2n$. La (ξ) implica che p divide $2^{m-2n}(1 + 2^{2n-1} - 2^{4n-m-1})$ e quindi p divide $2^{2n-1} + 1 - 2^{4n-m-1}$, da cui si ottiene che p divide $2^{2n} + 2 - 2^{4n-m} = 2^{2n} + 1 - (2^{4n-m} - 1)$; ne segue, poiché p divide $2^{2n} + 1$, che p divide $2^{4n-m} - 1$ e ciò contraddice la minimalità di m . Le contraddizioni ottenute provano l'asserto. $\square$

Si prova facilmente che nel lemma precedente l'ipotesi che n sia dispari non è essenziale. Invece, con facili esempi, si verifica che l'ipotesi che m sia dispari è essenziale.

3 - CONCLUSIONI

In questo paragrafo viene fornita una caratterizzazione aritmetica dei gruppi semplici di Suzuki.

Teorema 1. *Siano n ed m interi positivi. Allora $\sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m))$ se e solo se $2n + 1$ divide $2m + 1$.*

Dimostrazione. La condizione sufficiente è ovvia. Sia dunque $\sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m))$. Tale ipotesi è ovviamente equivalente alla seguente

$$\sigma((2^{2(2n+1)} + 1)(2^{2n+1} - 1)) \subseteq \sigma((2^{2(2m+1)} + 1)(2^{2m+1} - 1)). \quad (\alpha)$$

Il Lemma 2 assicura che $(2^{2(2n+1)} + 1, 2^{2m+1} - 1) = 1$, sicché l'ipotesi (α) implica

$$\sigma(2^{2(2n+1)} + 1) \subseteq \sigma(2^{2(2m+1)} + 1)$$

e

$$\sigma(2^{2n+1} - 1) \subseteq \sigma(2^{2m+1} - 1).$$

Di conseguenza il Lemma 1 (oppure il Lemma 2) fornisce l'asserto. $\square$

Corollario 1. *Siano n ed m interi positivi. Allora $\sigma(s(n)) = \sigma(s(m))$ se e solo se $m = n$.*

Dimostrazione. Segue subito dal Teorema 1. $\square$

Teorema 2. *Sia m un intero positivo. Se E è un $\sigma(s(m))$ -gruppo semplice non abeliano, allora E è isomorfo a un gruppo di Suzuki $S_Z(2^{2n+1})$, dove $2n + 1$ divide $2m + 1$. In particolare, se $\sigma(|E|) = \sigma(s(m))$ allora $E \simeq S_Z(2^{2m+1})$.*

Dimostrazione. Sia E semplice non abeliano e $\sigma(s(m))$ -gruppo, cioè $\sigma(|E|) \subseteq \sigma(s(m))$. Allora, poiché $3 \notin \sigma(s(m))$, 3 non divide l'ordine di E e pertanto è ben noto che E è isomorfo a un gruppo di Suzuki $S_Z(2^{2n+1})$ (cfr. ad esempio, Huppert, Blackburn, 1982, X, 10.14, pag. 90). Si ha allora $\sigma(|E|) = \sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m))$ e il Teorema 1 assicura che $2n + 1$ divide $2m + 1$. La seconda parte dell'enunciato segue subito dal Corollario 1. $\square$

Il risultato seguente generalizza quello ottenuto in (D'Aniello et al., 2006, Lemma 3.3 per il gruppo di Suzuki $S_Z(2^3)$).

Corollario 2. *Sia m un intero positivo e sia p un primo $\neq 3$ e tale che $p \notin \sigma(s(m))$. Posto $\pi_{m,p} := \sigma(s(m)) \cup \{p\}$, i $\pi_{m,p}$ -gruppi semplici non abeliani sono, a meno di isomorfismi, tutti e soli i gruppi di Suzuki $S_Z(2^{2n+1})$ con $2n + 1$ divisore di $2m + 1$.*

Dimostrazione. Sia E un $\pi_{m,p}$ -gruppo semplice non abeliano. Poiché E è un $3'$ -gruppo, esso è isomorfo a un gruppo di Suzuki $S_Z(2^{2n+1})$ e quindi

$$\sigma(|E|) = \sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m)) \cup \{p\}. \quad (\alpha)$$

Per completare la dimostrazione resta da provare che $2n + 1$ divide $2m + 1$. A tale scopo si proverà in primo luogo che $p \notin \sigma(|E|)$.

Se, per assurdo, $p \in \sigma(|E|)$ si ha che $p \in \sigma(2^{2(2n+1)} + 1)$ oppure $p \in \sigma(2^{2n+1} - 1)$. Nel primo caso si ha che $\sigma(2^{2n+1} - 1) \subseteq \sigma(2^{2m+1} - 1)$ e il Lemma 1 conduce alla contraddizione $p \notin \sigma(|E|)$. Nel secondo caso si ha che $\sigma(2^{2(2n+1)} + 1) \subseteq \sigma(2^{2(2m+1)} + 1)$ e il Lemma 2 fornisce ancora la contraddizione $p \notin \sigma(|E|)$. Pertanto $p \notin \sigma(|E|)$ e quindi da (α) segue $\sigma(|E|) = \sigma(s(n)) \subseteq \sigma(s(m))$ da cui, in virtù del Teorema 1, segue infine che $2n + 1$ divide $2m + 1$. $\square$

BIBLIOGRAFIA

- Burnside W. (1904) On groups of order $p^\alpha q^\beta$, Proc. London Math. Soc. 2, **1**, 388-392.
- D'Aniello A., De Vivo C. and Giordano G. (2006) On certain saturated formations of finite groups, Proceedings Ischia Conference, 22-32.
- Feit W. and Thompson J.G. (1963) Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math., **13**, 775-1029.
- Huppert B. and Blackburn N. (1982) Finite groups III, Springer Verlag, Berlin, New York.
- Kleidman P. and Liebeck M. (1990) The subgroup structure of the finite classical groups, Cambridge University Press.
- Suzuki M. (1962) On a class of doubly transitive groups, Ann. Math. **75**, 105-145.

On time and length in special relativity

Nota del socio Giovanni Romano¹

(Presentata nell'Adunanza del 2 maggio, 2014)

Key words: Special relativity, Voigt-Lorentz transformations, time dilation, longitudinal length dilation.

Abstract - Two well-known statements in special relativity, *time dilation* (with *slower* clocks) and *longitudinal length contraction* are revisited by a geometric definition of framings and by an analysis of frame changes in the event manifold. Applied to VOIGT-LORENTZ transformations, the theory provides frame invariant notions of clock-rates and of longitudinal lengths. When time-lapses are measured by an observer along the transformed time-line detected by a moving observer, then clock-rates and time-lapses result to be increased by the relativistic factor. This relativistic effect is LARMOR *time dilation* (but with *faster* clocks). Analogously, when an observer detects the longitudinal abscissae at the end points of a small bar at rest and compares the length evaluation with the abscissae of the spatial projections, at different time instants, of the bar image in a moving frame, then the longitudinal length appears to be increased by the relativistic factor. The relativistic effect is a *longitudinal length dilation* and not a FITZGERALD-LORENTZ *contraction*. A treatment in terms of velocities extends the analysis to nonlinear frame transformations.

Riassunto - Una analisi geometrica delle trasformazioni di VOIGT-LORENTZ in relatività speciale rivela che i noti effetti di dilatazione del tempo (con orologi più lenti) e di contrazione delle lunghezze longitudinali vanno modificati in dilatazione del tempo (con orologi più veloci) e dilatazione delle lunghezze longitudinali.

¹Department of Structures, University of Naples Federico II, via Claudio 21, 80125 - Naples, Italy. e-mail: romano@umina.it

1. PROLEGOMENA

A revisitation of well-known issues of modern physics is presented here, motivated by the emergence of improper statements concerning measurements of time and length in the context of special relativity. To provide a sound mathematical treatment, basic theoretical notions are dealt with a differential geometric approach, commonly adopted in classical textbooks on relativity (Misner, Thorne and Wheeler, 1973). The reader more oriented towards a physical point of view can however find a completely standard treatment in the concluding section, where a detailed discussion of the new outcomes of the analysis is provided.

2. EVENT MANIFOLD AND OBSERVERS

Let us assume that the *event manifold* E is a 4-dimensional star-shaped orientable manifold without boundary.

The *tangent bundle* to E will be denoted by TE and the *exterior derivative* in the event manifold E will be denoted by d (doCarmo, 1994; Romano G., 2007).

A *framing* (or *observer*) consists in a criterion to assess simultaneity in the event manifold. The criterion is described in geometrical terms by a field of time-arrows $\mathbf{Z} \in C^1(E; TE)$ and by a field of rank-one projectors (Whiston, 1974; Marmo and Preziosi, 2006)

$$\mathbf{R} := \omega \otimes \mathbf{Z} \quad (1)$$

with $\omega \in \Lambda^1(TE)$ closed one-form, $d\omega = 0$. Idempotency $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$ is equivalent to *tuning* property $\langle \omega, \mathbf{Z} \rangle = 1$.

By POINCARÉ Lemma, $\omega = dt_E$ with $t_E \in C^1(E; \mathbb{R})$ projection (surjective submersion) defining the fibration of E over the real time-line $\mathbb{R}$.²

Lemma 2.1 (Space-time splitting). *The projectors $\mathbf{R}, \mathbf{P}$*

$$\mathbf{P} := \mathbf{I} - \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{P} = \mathbf{0},$$

perform a splitting of tangent vectors $\mathbf{X} \in TE$ into spatial and temporal components with

$$dt_E \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}, \quad \text{Ker } dt_E = \text{Im } \mathbf{P}. \quad (2)$$

² The symbol Z is taken from the German word *Zeit* for *Time*.

Proof. Being $\mathbf{R}(\mathbf{X}) = (dt_E \otimes \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{X} = \langle dt_E, \mathbf{X} \rangle \mathbf{Z}$, all properties are verified by a direct calculation. ■

Under the action of a framing $\mathbf{R} := dt_E \otimes \mathbf{Z}$ the tangent bundle TE splits into a WHITNEY bundle $VE \times_E HE$ of time-vertical and time-horizontal tangent vectors with $VE = \text{Im } \mathbf{P}$ and $HE = \text{Im } \mathbf{R}$. The 3D fibers of VE are in the kernel of $dt_E \in \Lambda^1(TE)$.

Both subbundles VE and HE of TE are integrable. To see this, we observe that FROBENIUS involutivity condition, which is expressed in terms of the LIE bracket $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ by the implication (Romano G., 2007)

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{D} \implies [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathcal{D}, \quad (3)$$

is trivially fulfilled by any 1D subbundle $\mathcal{D}$. This proves integrability of the horizontal subbundle HE . On the other hand, the vertical subbundle VE is the kernel of the closed one-form $\omega \in \Lambda^1(TE)$, and hence the involutivity condition may be written as

$$\omega \cdot \mathbf{X} = 0, \quad \omega \cdot \mathbf{Y} = 0 \implies \omega \cdot [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0. \quad (4)$$

By virtue of PALAIS formula

$$d\omega \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = d(\omega \cdot \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X} - d(\omega \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} - \omega \cdot [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (5)$$

Eq. (4) may equivalently be expressed by

$$\omega \cdot \mathbf{X} = 0, \quad \omega \cdot \mathbf{Y} = 0 \implies d\omega \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0, \quad (6)$$

and is therefore trivially implied by the closedness property $d\omega = 0$.

The 1D submanifolds of E , generated as integral curves of the time-arrow field $\mathbf{Z} \in C^1(E; TE)$, are called *time-lines* while the transversal 3D submanifolds of E are called *space-slices*.

Events lying on a time-line are called *isotopic* since they share a common spatial position. Events lying on a space-slice are called *isochronous* (or *simultaneous*) since they share a common time instant.

By definition, time-lines are parametrized so that their velocity fields are made of time-arrows.

The integral manifolds of the vertical distribution VE define a *time-bundle* projection $t_E \in C^1(E; Z)$ according to which a time instant $t \in Z$ is assigned to each spatial slice, so that $E(t) := t_E^{-1}(\{t\})$.

Definition 2.1 (Spatial bundle). *The spatial bundle S is the fiber bundle over Z whose fibre $S(t)$ is a 3-D manifold with canonical isomorphism $\mathbf{i}_{E,S}(t) \in C^1(S(t); E(t))$ onto the 3-D submanifold $E(t)$ of the 4-D space-time event manifold E .*

For any fixed time $t \in Z$, the isomorphism $\mathbf{i}_{E,S}(t) \in C^1(S(t); E(t))$ may be acted upon by the tangent functor to provide a fibrewise defined *space-time extension*, $\mathbf{i}_{E,S}\uparrow \in C^1(VS; VE)$ which is a global bundle isomorphism but not the tangent map of a morphism.³

The inverse morphism $\mathbf{i}_{E,S}\downarrow \in C^1(VE; VS)$ is the *spatial restriction*.

Vectors in VE , henceforth denoted by capital letters, have four space-time components in a space-time frame, while vectors in VS , denoted by small letters, have three spatial components in a space frame.

Definition 2.2 (Charts, reference systems, natural frames). *A chart is a local diffeomorphism from a subset of the event manifold E onto an open set of the model linear space $\mathcal{R}^4$. A reference system is the inverse map $f : \mathcal{R}^4 \mapsto E$. The natural frame associated with a reference system is provided by the vector fields which are the velocity vectors $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ of the coordinate lines.*

Declaring that $\mathcal{R}^4 = \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_3 = \{\mathcal{R}_\alpha\}$ with $\alpha = 0, 1, 2, 3$, we have that

$$\partial_\alpha \circ f := Tf \cdot 1_\alpha \iff \partial_\alpha = f\uparrow 1_\alpha, \quad (7)$$

where 1_α are the vectors of the usual basis in $\mathcal{R}^4$. The cartesian projectors $\pi_\alpha : \mathcal{R}^4 \mapsto \mathcal{R}_\alpha$ define the coordinate maps $\pi_\alpha \circ f^{-1} : E \mapsto \mathcal{R}_\alpha$. In the cotangent bundle, the differentials $\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$ defined by

$$d_\alpha = T(\pi_\alpha \circ f^{-1}) = T\pi_\alpha \cdot Tf^{-1}, \quad (8)$$

provide the dual frame of the natural frame $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ in tangent bundle. Indeed

$$\begin{aligned} \langle d_\alpha, \partial_\beta \rangle &= T(\pi_\alpha \circ f^{-1} \circ f) \cdot 1_\beta = (T\pi_\alpha \cdot Tf^{-1} \cdot Tf) \cdot 1_\beta \\ &= T\pi_\alpha \cdot 1_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Here $\delta_{\alpha\beta}$ is the KRONECKER symbol.

³ The push-pull $\uparrow, \downarrow$ notation is still adopted for convenience.

A change of coordinate system from $f : \mathcal{R}^4 \mapsto E$ to $\hat{f} : \mathcal{R}^4 \mapsto E$ is induced by a coordinate diffeomorphic transformation $\zeta_{\text{num}} \in C^1(\mathcal{R}^4; \mathcal{R}^4)$, according to the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ f \nearrow & & \nwarrow \hat{f} \\ \mathcal{R}^4 & \xleftarrow{\zeta_{\text{num}}} & \mathcal{R}^4 \end{array} \iff \hat{f} = f \circ \zeta_{\text{num}}. \quad (10)$$

3. TRAJECTORY AND MOTION

The trajectory $\mathcal{T}$ is a non-linear manifold of events characterized by an injective immersion $\mathbf{i} \in C^1(\mathcal{T}; E)$ such that the immersed trajectory $\mathcal{T}_E := \mathbf{i}(\mathcal{T}) \subset E$ is a submanifold of the event manifold.

Events in the trajectory are labeled by coordinates in that manifold whose dimensionality may in general be lower than the one of the event manifold. Events in the immersed trajectory are instead labeled by coordinates in the event manifold.

Definition 3.1 (Material bundle). *The material bundle is the trajectory fibration generated by the time-bundle projection $t_{\mathcal{T}} = t_E \circ \mathbf{i} \in C^1(\mathcal{T}; Z)$ over the time-line Z . The fibres $\mathcal{T}(t)$ are called trajectory slices.*

The motion detected in a given framing, is a one-parameter family of automorphisms $\varphi_{\alpha} \in C^1(\mathcal{T}_E; \mathcal{T}_E)$ of the trajectory time-bundle over the time translation $\text{TR}_{\alpha} \in C^1(Z; Z)$, defined by $\text{TR}_{\alpha}(t) := t + \alpha$ with $t \in \mathcal{R}$ *time-instant* and $\alpha \in Z$ *time-lapse*, described by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_E & \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} & \mathcal{T}_E \\ t_E \downarrow & & \downarrow t_E \\ Z & \xrightarrow{\text{TR}_{\alpha}} & Z \end{array} \iff t_E \circ \varphi_{\alpha} = \text{TR}_{\alpha} \circ t_E,$$

which expresses the simultaneity preservation property of motion (Romano G., 2007).

Events related by the space-time motion along the trajectory, i.e.

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in E \mid \exists \alpha \in \mathcal{R} : \mathbf{e}_2 = \varphi_{\alpha}(\mathbf{e}_1),$$

form a class of equivalence and the equivalence relation foliates the trajectory manifold (Romano et al., 2009a,b; Romano and Barretta, 2011, 2013a,b; Romano et al., 2014).

A material particle is a line (a one-dimensional manifold) whose elements are motion-related events in the trajectory.

The body is the disjoint union of the trajectory material particles, a quotient manifold induced by the foliation of the trajectory manifold.

A body placement is a fibre of simultaneous trajectory-events. The placement at time $t \in I$ is then the trajectory slice $\mathcal{T}_E(t)$.

The space-time *trajectory velocity* $\mathbf{V} \in C^1(\mathcal{T}_E; T\mathcal{T}_E)$ is the vector field defined by $\mathbf{V} := \partial_{\alpha=0} \varphi_\alpha$. Since motion is time-parametrized, we have that

$$\langle dt_E, \mathbf{V} \rangle = 1, \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z} + \mathbf{P}\mathbf{V}, \quad \mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{Z}. \quad (11)$$

Spatial velocity is related to space-time velocity by $\mathbf{v} = \mathbf{i}_{E,S}\downarrow(\mathbf{P}\mathbf{V}) \in VS$. For simplicity, we will here consider the case in which the trajectory manifold $\mathcal{T}$ is four-dimensional.

4. CHANGES OF FRAME

A *change of frame* is an automorphism $\zeta_E \in C^1(E; E)$ of the event manifold. A *trajectory transformation* $\zeta \in C^1(\mathcal{T}; \mathcal{T}_\zeta)$ is a diffeomorphism between trajectory manifolds, induced by a change of frame according to the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\zeta_E} & E \\ \uparrow \mathbf{i} & & \uparrow \mathbf{i}_\zeta \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{T}_\zeta \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{i}_\zeta \circ \zeta = \zeta_E \circ \mathbf{i},$$

with $\mathbf{i} \in C^1(\mathcal{T}; E)$ and $\mathbf{i}_\zeta \in C^1(\mathcal{T}_\zeta; E)$ injective immersions.

Lemma 4.1 (Pushed framings). *Under a change of frame, according to an automorphism $\zeta_E \in C^1(E; E)$, a framing $\mathbf{R} = dt_E \otimes \mathbf{Z}$ is pushed to a framing*

$$\mathbf{R}_\zeta = dt_{E_\zeta} \otimes \mathbf{Z}_\zeta,$$

with $t_{E_\zeta} := \zeta_E \uparrow t_E$ and $\mathbf{R}_\zeta = \zeta_E \uparrow \mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_\zeta := \zeta_E \uparrow \mathbf{Z}$, and tuning is preserved.

Proof. By definition of push of a covector field it follows that

$$\zeta_E \uparrow \mathbf{R} = \zeta_E \uparrow (dt_E \otimes \mathbf{Z}) = (\zeta_E \uparrow dt_E) \otimes (\zeta_E \uparrow \mathbf{Z})$$

Setting $t_{E_\zeta} := \zeta_E \uparrow t_E = t_E \circ \zeta_E^{-1}$, the commutativity property

$$\zeta_E \uparrow \circ d = d \circ \zeta_E \uparrow, \quad (12)$$

implies that

$$dt_{E_\zeta} = d(t_E \circ \zeta_E^{-1}) = d(\zeta_E \uparrow t_E) = \zeta_E \uparrow dt_E.$$

The naturality property $\langle dt_{E_\zeta}, \mathbf{Z}_\zeta \rangle = \zeta_E \uparrow \langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle = 1$ assures persistence of tuning. $\blacksquare$

Trajectories and motions $\varphi_\alpha \in C^1(\mathcal{T}; \mathcal{T})$ and $(\zeta \uparrow \varphi)_\alpha \in C^1(\mathcal{T}_\zeta; \mathcal{T}_\zeta)$, evaluated in frames related by a trajectory transformation $\zeta \in C^1(\mathcal{T}; \mathcal{T}_\zeta)$, are related by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_\zeta & \xrightarrow{(\zeta \uparrow \varphi)_\alpha} & \mathcal{T}_\zeta \\ \zeta \uparrow & & \uparrow \zeta \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathcal{T} \end{array} \iff (\zeta \uparrow \varphi)_\alpha \circ \zeta = \zeta \circ \varphi_\alpha.$$

Definition 4.1 (Frame-invariance). A tensor field on the trajectory manifold $\mathbf{s} \in C^1(\mathcal{T}; \text{TENS}(T\mathcal{T}))$ is frame-invariant under the action of a trajectory transformation $\zeta \in C^1(\mathcal{T}; \mathcal{T}_\zeta)$ if it varies by push

$$\mathbf{s}_\zeta = \zeta \uparrow \mathbf{s}.$$

A relation involving tensor fields is frame-invariant if it transforms by push. The pushed relation is defined by the property that its fulfilment by the involved tensor fields holds if and only if the pulled-back tensor fields do fulfill the original relation.

Lemma 4.2 (Frame-invariance of trajectory velocity). The trajectory velocity is frame-invariant: $\mathbf{V}_\zeta = \zeta \uparrow \mathbf{V}$.

Proof. Being $\mathbf{V} := \partial_{\alpha=0} \varphi_\alpha$ and $\mathbf{V}_\zeta := \partial_{\alpha=0} (\zeta_E \uparrow \varphi)_\alpha$, the direct computation

$$\mathbf{V}_\zeta = \partial_{\alpha=0} (\zeta \circ \varphi_\alpha \circ \zeta_T^{-1}) = T\zeta \cdot \mathbf{V} \circ \zeta_T^{-1} = \zeta \uparrow \mathbf{V},$$

gives the formula. ■

Lemma 4.3 (Immersion and push of vector fields). *Spatial vectors according to a framing $\mathbf{R}$, when pushed by a change of frame, are still spatial vectors in the pushed framing $\zeta_E \uparrow \mathbf{R}$ as expressed by the commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{\zeta_E \uparrow} & TE \\ \uparrow \mathfrak{i} \uparrow & & \uparrow \mathfrak{i}_\zeta \uparrow \\ VS & \xrightarrow{\zeta_S \uparrow} & VS_\zeta \end{array} \iff \mathfrak{i}_\zeta \uparrow \circ \zeta_S \uparrow = \zeta_E \uparrow \circ \mathfrak{i} \uparrow.$$

The spatial bundle isomorphism $\zeta_S \uparrow \in C^1(VS; VS_\zeta)$ is induced by the space-time push $\zeta_E \uparrow \in C^1(TE; TE)$ according to a change of frame $\zeta_E \in C^1(E; E)$. The inverse isomorphism is $\zeta_S \downarrow \in C^1(VS_\zeta; VS)$.⁴

Proof. The push of forms is defined by invariance

$$\langle \zeta_E \uparrow dt_E, \zeta_E \uparrow \mathbf{X} \rangle = \zeta_E \uparrow \langle dt_E, \mathbf{X} \rangle, \quad \forall \mathbf{X} \in C^1(E; TE),$$

and hence $\langle dt_E, \mathbf{X} \rangle = 0 \implies \langle \zeta_E \uparrow dt_E, \zeta_E \uparrow \mathbf{X} \rangle = 0$. ■

Lemma 4.4 (Simultaneity preservation). *Simultaneous events according to an initial framing $\mathbf{R}$ are transformed, by frame-changes in event manifold, into simultaneous events according to the pushed framing $\mathbf{R}_\zeta = \zeta_E \uparrow \mathbf{R}$.*

Proof. The integral manifolds of a time-vertical field $\zeta_E \uparrow \mathbf{X} \in C^1(E; VE_\zeta)$ are space-slices got as ζ_E -images of the integral manifolds of the corresponding time-vertical field $\mathbf{X} \in C^1(E; VE)$. Then frame-changes transform simultaneous events in the initial frame into simultaneous events according to the pushed frame. It follows that the restriction of $\zeta_S \uparrow$ to a space-slice is equal to the push according to ζ_S transformation between spatial slices, induced by the ζ_E -transformation. ■

⁴ The isomorphism $\zeta_S \uparrow \in C^1(VS; VS_\zeta)$ is not the tangent map of an automorphism of the event manifold E , unless restriction to a spatial slice is considered, see the proof of Lemma 4.4.

Definition 4.2 (Adapted frames). *A frame is a set of tangent vector fields which gives a basis at each point. A frame is adapted to a framing if one family of coordinate lines is envelop of the time-arrow field and the other three families define reference systems in the spatial slicings.*

In an adapted space-time frame $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ with $\mathbf{X}_0 = \mathbf{Z}$, vectors in VE will have a zero first component. We will denote by $\{\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3\}$ the dual frame, that is the quartet of one-forms such that

$$\langle \mathbf{X}^i, \mathbf{X}_j \rangle = \delta_j^i, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (13)$$

5. PUSHED NATURAL FRAMES

With reference to Def. 2.2, let us consider in the event manifold the natural frame $\partial_\alpha := Tf \cdot 1_\alpha$, with $\alpha = 0, 1, 2, 3$, associated with a coordinate system $f: \mathcal{R}^4 \mapsto E$ and the dual frame d^α .

A tuned framing $\mathbf{R} = dt_E \otimes \mathbf{Z}$ is then naturally induced by expressing the time projection as 0-th coordinate by the formula $t_E := \pi_0 \circ f^{-1}: E \mapsto \mathcal{R}_0$, and setting $\mathbf{Z} = \partial_0$. Then

$$\begin{cases} dt_E = d(\pi_0 \circ f^{-1}) = d\pi_0 \cdot Tf^{-1} = d_0, \\ \mathbf{Z} \circ f = \partial_0 \circ f = Tf \cdot 1_0, \end{cases} \quad (14)$$

and, with $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{cases} \langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle = \langle d_0, \partial_0 \rangle = \langle d\pi_0 \cdot Tf^{-1}, Tf \cdot 1_0 \rangle = 1, \\ \langle dt_E, \partial_i \rangle = \langle d_0, \partial_i \rangle = \langle d\pi_0 \cdot Tf^{-1}, Tf \cdot 1_i \rangle = 0. \end{cases} \quad (15)$$

So tuning is fulfilled and the frame vectors ∂_i are tangent to spatial slices.

A change of frame $\zeta_E \in C^1(E; E)$ is usually described by fixing a reference system $f: \mathcal{R}^4 \mapsto E$ and considering the corresponding coordinate transformation $\zeta_{\text{num}} \in C^1(\mathcal{R}^4; \mathcal{R}^4)$ defined by $\zeta_{\text{num}} := f^{-1} \circ \zeta_E \circ f$. An equivalent description is got by considering another reference system $\hat{f}: \mathcal{R}^4 \mapsto E$ defined by $\hat{f} := \zeta_E \circ f$, as shown by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\zeta_E} & E \\ f \uparrow & \nearrow \hat{f} & \uparrow f \\ \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\zeta_{\text{num}}} & \mathcal{R}^4 \end{array} \iff \hat{f} := \zeta_E \circ f = f \circ \zeta_{\text{num}}. \quad (16)$$

Under the frame change $\zeta_E \in C^1(E; E)$ induced by a reference system $f : \mathcal{R}^4 \mapsto E$ and by a coordinate transformation $\zeta_{\text{num}} \in C^1(\mathcal{R}^4; \mathcal{R}^4)$, the time projection in the pushed framing and its differential are given by

$$t_{E\zeta} := \zeta_E \uparrow t_E = t_E \circ \zeta_E^{-1} = \pi_0 \circ \hat{f}^{-1},$$

$$dt_{E\zeta} = d(\zeta_E \uparrow t_E) = \zeta_E \uparrow dt_E = dt_E \cdot T\zeta_E^{-1} = d\pi_0 \cdot T\hat{f}^{-1}.$$

1. The pushed time projection $\zeta_E \uparrow t_E : E \mapsto \mathcal{R}_0$ is then the 0-th coordinate of transformed events according to the transformed reference system $\hat{f} = f \circ \zeta_{\text{num}}$.
2. The time projection $\hat{t}_E$ is instead the 0-th coordinate of transformed events according to the original reference system f .

The relation between these time projections is depicted by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{\zeta_E \uparrow t_E} & \\
 & & & \uparrow \hat{t}_E & \\
 E & \xleftarrow{f} & \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\pi_0} & \mathcal{R}_0 \\
 \uparrow \zeta_E & & \uparrow \zeta_{\text{num}} & & \downarrow \\
 E & \xleftarrow{\hat{f}} & \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\pi_0} & \mathcal{R}_0 \\
 & & & \downarrow t_E & \\
 & & & \xrightarrow{\zeta_E \uparrow t_E} &
 \end{array} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 & i) \quad t_E = \pi_0 \circ f^{-1}, \\
 \iff & ii) \quad \zeta_E \uparrow t_E = \pi_0 \circ \hat{f}^{-1}, \\
 & iii) \quad \hat{t}_E \circ \zeta_E \circ f = \pi_0 \circ \zeta_{\text{num}},
 \end{aligned}$$

whence $\hat{t}_E \circ \zeta_E \circ f \circ \zeta_{\text{num}}^{-1} = t_E \circ f = \pi_0$.

A peculiar property of GALILEI (or more in general EUCLID) frame changes is that the coordinate transformation $\zeta_{\text{num}} \in C^1(\mathcal{R}^4; \mathcal{R}^4)$ fulfills the following *time universality property*

$$\pi_0 = \pi_0 \circ \zeta_{\text{num}}. \tag{18}$$

Then $\hat{t}_E = t_{E\zeta} := \zeta_E \uparrow t_E$, as shown by diagram (19) below.

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{\hat{t}_E = \zeta_E \uparrow t_E}{\curvearrowright} & \\
 E & \xleftarrow{f} \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\pi_0} \mathcal{R}_0 \\
 \uparrow \zeta_E & \nearrow \hat{f} \quad \uparrow \zeta_{\text{num}} & \nearrow \pi_0 \\
 E & \xleftarrow{f} \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\pi_0} \mathcal{R}_0 \\
 & \underset{t_E}{\curvearrowright} &
 \end{array} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \iff \quad & i) \quad t_E = \pi_0 \circ f^{-1}, \\
 & ii) \quad \hat{t}_E = \zeta_E \uparrow t_E = \pi_0 \circ \hat{f}^{-1}
 \end{aligned}$$

The diagram (17) can be extended to all coordinates as exemplified by the following diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{\zeta_E \uparrow x_\alpha}{\curvearrowright} & \\
 E & \xleftarrow{f} \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\pi_\alpha} \mathcal{R}_\alpha \\
 \uparrow \zeta_E & \nearrow \hat{f} \quad \uparrow \zeta_{\text{num}} & \nearrow \pi_\alpha \\
 E & \xleftarrow{f} \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\pi_\alpha} \mathcal{R}_\alpha \\
 & \underset{x_\alpha}{\curvearrowright} &
 \end{array} \quad (20)$$

6. CLOCK RATE AND TIME LAPSE

In a framing $\mathbf{R} = dt_E \otimes \mathbf{Z}$ the physical notions of time line and of clock and clock rate are expressed by the following geometric definitions.

Definition 6.1 (Time-line path). A time-line path $\mathbf{p} : t \in [0, \Delta t] \rightarrow E$ is a segment of a time-line, i.e. an integral curve of the field of time-arrows, so that path velocities are time-arrows

$$\mathbf{p}'(t) := \partial_{\mu=t} \mathbf{p}(\mu) = (\mathbf{Z} \circ \mathbf{p})(t). \quad (21)$$

Definition 6.2 (Clock, Rate and Time-lapse). *The clock is the time differential dt_E and the clock rate is the evaluation of the time-differential along the time-arrow. In tuned framings the clock rate is unitary. The time-lapse is the integral of the clock rate along a time-line path $\mathbf{p} : t \in [0, \Delta t] \rightarrow E$*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{p}} dt_E &:= \int_0^{\Delta t} \langle dt_E \circ \mathbf{p}(t), \mathbf{p}'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{\Delta t} \langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle \circ \mathbf{p}(t) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

In a tuned framing, being $\langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle = 1$, the time-lapse is equal to the time increment

$$\int_{\mathbf{p}} dt_E = \int_0^{\Delta t} \langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle \circ \mathbf{p}(t) dt = \Delta t. \quad (23)$$

According to Lemma 4.1 tuning is preserved by a change from a given framing $\mathbf{R} = dt_E \otimes \mathbf{Z}$ to the pushed framing $\mathbf{R}_\zeta = \zeta_E \uparrow \mathbf{R}$ since

$$\begin{aligned} \langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle &= \langle \zeta_E \uparrow dt_E, \zeta_E \uparrow \mathbf{Z} \rangle = \langle d(\zeta_E \uparrow t_E), \zeta_E \uparrow \mathbf{Z} \rangle \\ &= \langle dt_{E_\zeta}, \zeta_E \uparrow \mathbf{Z} \rangle = 1. \end{aligned} \quad (24)$$

This result can be enunciated by stating that the clock rates measured in push-related framings are the same.

On the other hand, tuning may be lost under a change of frame in which the framings are not push-related.

In a pushed framing $\mathbf{R}_\zeta = \zeta_E \uparrow \mathbf{R}$ the time-lapse evaluated along a pushed time-line path $\zeta_E \circ \mathbf{p} : t \in [0, \Delta t] \rightarrow E$ is the same as the time-lapse evaluated in the framing $\mathbf{R}$ along the corresponding time-line path $\mathbf{p} : t \in [0, \Delta t] \rightarrow E$ by the formula Eq. (22). Indeed, by the commutativity property Eq. (12) and by the integral transformation formula it follows that

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_E \circ \mathbf{p}} dt_{E_\zeta} &= \int_{\zeta_E \circ \mathbf{p}} d(\zeta_E \uparrow t_E) \\ &= \int_{\zeta_E \circ \mathbf{p}} \zeta_E \uparrow dt_E = \int_{\mathbf{p}} dt_E. \end{aligned} \quad (25)$$

7. MINKOWSKI PSEUDO METRIC

A basic axiom of special relativity theory in physics is that no spatial speed can be greater than the spatial speed c of light *in vacuo*.

Denoting by $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{Z} \in C^1(E; TE)$ a space-time velocity vector field, with related spatial velocity field $\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{V}$, and by $\mathbf{g}_S \in C^1(S; \text{SYM}(TS))$ the metric tensor field in the EUCLID spatial bundle, this basic axiom is expressed by the condition

$$\mathbf{g}_S(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq c^2, \quad (26)$$

which defines a convex set of admissible spatial velocities in the tangent bundle TS .

The MINKOWSKI pseudo metric tensor field⁵ $\mathbf{g}_E \in C^1(E; \text{SYM}(TE))$ is defined in the event manifold E by

$$\mathbf{g}_E := \mathbf{P} \downarrow \mathbf{g}_S - c^2 dt_E \otimes dt_E. \quad (27)$$

Accordingly, the inequality Eq. (26) may be rewritten as a homogeneous condition on space-time velocities, defining the convex set

$$\mathbf{g}_E(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \leq 0. \quad (28)$$

The boundary of the cone generated by this convex set of space-time velocities is called the *light cone*. Recalling that $dt_E \cdot \mathbf{P}\mathbf{X} = 0$ for all $\mathbf{X} \in TE$ and $\mathbf{P}\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ by definition of the projector $\mathbf{P}$ and $dt_E \cdot \mathbf{Z} = 1$ by tuning, it may be concluded that for all $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in TE$ such that $\mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ we have

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbf{g}_S(\mathbf{P}\mathbf{X}, \mathbf{P}\mathbf{Y}) - c^2, \\ \mathbf{g}_E(\mathbf{P}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

In an adapted space-time frame $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$, with $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ a $\mathbf{g}_S$ -orthonormal spatial frame and $\mathbf{X}_0 = \mathbf{Z}$, the components of MINKOWSKI pseudo metric tensor field are

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_E(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) &= -c^2, \\ \mathbf{g}_E(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_i) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \mathbf{g}_E(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) &= \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (30)$$

The GRAM matrix is then

$$\begin{bmatrix} -c^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

⁵ A pseudo-metric tensor field fulfills the properties of a metric field, except positivity.

8. VOIGT-LORENTZ TRANSFORMATIONS

In the affine event manifold of special relativity a frame $\{ \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 \}$ adapted to a framing $\mathbf{R} = dt_E \otimes \mathbf{Z}$ has the first vector given by $\mathbf{X}_0 = \mathbf{Z}$ and the tangent vectors $\{ \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 \}$ got by immersion of the orthonormal frame $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \}$ in the spatial slices.

Coordinates are classically denoted by $\{ t, x, y, z \}$. Denoting by

$$f : \{ t, x, y, z \} \in \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathbf{e} \in E, \quad (32)$$

a reference system for the event manifold and acting with the tangent functor, we get the diagrams

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\zeta_E} & E \\ f \uparrow & & \uparrow f \\ \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{\zeta_{\text{num}} = f^{-1} \circ \zeta_E \circ f} & \mathcal{R}^4 \end{array} \implies \quad (33)$$

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{T\zeta_E} & TE \\ Tf \uparrow & & \uparrow Tf \\ T\mathcal{R}^4 & \xrightarrow{T\zeta_{\text{num}} = T^{-1} \cdot f \cdot T\zeta_E \cdot Tf} & T\mathcal{R}^4 \end{array}$$

where $T\zeta_{\text{num}}$ is the JACOBI matrix associated with the coordinate transformation.

A VOIGT-LORENTZ frame transformation $\zeta_E^{\text{VL}} \in C^1(E; E)$ enjoy the characteristic property that

- spatial spherical light wave fronts evolving in a given frame still remain spherical in the same frame when the involved events are subject to such a transformation. Moreover the light propagation speed c *in vacuo* is not affected.

In the sequel these will be called VL-transformations. According to HERMANN MINKOWSKI (Minkowski, 1908), these transformations, introduced by HENDRIK LORENTZ in (Lorentz, 1904) and named after him by HENRI POINCARÉ (Poincaré, 1906), were conceived about two decades before by WOLDEMAR VOIGT (Voigt, 1887). The transformations were later reported by ALBERT EINSTEIN in (Einstein, 1905) without quoting VOIGT, LORENTZ and POINCARÉ.

The expression of a linear VL-transformation and of the corresponding coordinate transformation $\zeta_{\text{num}}^{\text{VL}} : \mathcal{R}^4 \mapsto \mathcal{R}^4$ according to a coordinate system $f : \mathcal{R}^4 \mapsto E$, is deduced as follows.

Let us start from a linear coordinate transformation ⁶

$$\begin{cases} \hat{t} = \gamma t + \beta x, \\ \hat{x} = \sigma x + \theta t, \end{cases} \quad (34)$$

and define the relative translational speed w by

$$\begin{cases} w = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\hat{x}=\text{const}} = -\frac{\theta}{\sigma}, \\ -w = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{t}} \Big|_{x=\text{const}} = \frac{\theta}{\gamma}. \end{cases} \quad (35)$$

Then $\theta = -w\gamma = -w\sigma$ and hence $\sigma = \gamma$. Setting $\beta = \xi\gamma$ in Eq. (34) we get

$$\begin{cases} \hat{t} = \gamma(t + \xi x), \\ \hat{x} = \gamma(x - wt). \end{cases} \quad (36)$$

Substituting into the POINCARÉ condition (Poincaré, 1906)

$$\hat{x}^2 - c^2 \hat{t}^2 = x^2 - c^2 t^2, \quad (37)$$

the l.h.s. becomes

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 - c^2 \hat{t}^2 &= \gamma^2(x^2 + w^2 t^2 - 2wxt \\ &\quad - c^2 t^2 - c^2 x^2 \xi^2 - 2c^2 \xi xt). \end{aligned} \quad (38)$$

The terms linear in x cancel if $w = -c^2 \xi$ and this gives

$$\begin{cases} \hat{t} = \gamma(t - x(w/c^2)), \\ \hat{x} = \gamma(x - wt). \end{cases} \quad (39)$$

Finally from Eq. (37) and Eq. (38), equating the coefficient of x^2 and t^2 , we get the conditions

$$\begin{cases} \gamma^2(1 - w^2/c^2) = 1, \\ \gamma^2(c^2 - w^2) = c^2, \end{cases} \quad (40)$$

⁶ Linearity of the transformation is inessential since what in fact enters in the analysis is the tangent map of the transformation. This issue is dealt with in Sect. 9.

which are both fulfilled by setting

$$\gamma = \gamma_w := (1 - w^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

We may conclude that a VOIGT-LORENTZ coordinate transformation corresponding to a relative speed w in the x direction, is expressed by

$$\zeta_{\text{num}}^{\text{VL}} \cdot \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_w(t - x(w/c^2)) \\ \gamma_w(x - wt) \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (42)$$

whose JACOBI matrix is given by

$$T\zeta_{\text{num}}^{\text{VL}} = \begin{bmatrix} \gamma_w & -\gamma_w(w/c^2) & & \\ -\gamma_w w & \gamma_w & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

The inverse transformation is got by changing w into $-w$, so that γ_w is unchanged.

9. TANGENT VOIGT-LORENTZ TRANSFORMATION

The characteristic property of a nonlinear VOIGT-LORENTZ transformation $\zeta_E^{\text{VL}} \in C^1(E; E)$ consists in the invariance of the MINKOWSKI pseudo-metric tensor field, expressed by the condition $\zeta_E^{\text{VL}} \downarrow \mathbf{g}_E = \mathbf{g}_E$ and explicitly

$$\mathbf{g}_E(T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{V}, T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{g}_E(\mathbf{V}, \mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} \in TE. \quad (44)$$

The condition Eq. (44) assures that, if a space-time velocity field $\mathbf{V} \in TE$ fulfils the basic inequality Eq. (28), the transformed velocity field $\zeta_E^{\text{VL}} \uparrow \mathbf{V} \in TE$ will still fulfil the same inequality.

Let us choose as space-time frame $\{\mathbf{X}_\alpha\}$ the adapted natural frame $\partial_\alpha := Tf \cdot 1_\alpha$, with $\alpha = 0, 1, 2, 3$, associated with the coordinate system $f: \mathcal{R}^4 \mapsto E$, so that $\mathbf{X}_0 = \partial_0 = \mathbf{Z}$. The tangent functor applied to Eq. (16) gives

$$T\zeta_E \cdot \partial_\alpha = T\zeta_E \cdot Tf \cdot 1_\alpha = Tf \cdot T\zeta_{\text{num}} \cdot 1_\alpha = T\hat{f} \cdot 1_\alpha. \quad (45)$$

Dropping the inessential vector fields $\mathbf{X}_2$ and $\mathbf{X}_3$, the components of $\mathbf{V} \in TE$ and $\hat{\mathbf{V}} := \zeta_E^{\text{VL}} \uparrow \mathbf{V} \in TE$ in the space-time frame $\{\mathbf{X}_\alpha\}$ are denoted by

$$\begin{cases} \mathbf{V} = v_Z \mathbf{Z} + v_S \mathbf{X}_1, \\ \hat{\mathbf{V}} = \hat{v}_Z \mathbf{Z} + \hat{v}_S \mathbf{X}_1. \end{cases} \quad (46)$$

with the following tangent transformation relating the velocity components

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_Z \\ \hat{v}_S \end{bmatrix} = T\zeta_{\text{num}}^{\text{VL}} \begin{bmatrix} v_Z \\ v_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta \\ \theta & \sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_Z \\ v_S \end{bmatrix} \quad (47)$$

Setting $v_S = 0$, we get $\hat{v}_S = \theta v_Z$ and $\hat{v}_Z = \gamma v_Z$ so that the relative speed w is given by $-w = \hat{v}_S/\hat{v}_Z = \theta/\gamma$.

Setting $\hat{v}_S = 0$, we get $\theta v_Z + \sigma v_S = 0$ so that $w = v_S/v_Z = -\theta/\sigma$. Then $\sigma = \gamma$ and posing $\beta = \xi\gamma$ we write

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_Z \\ \hat{v}_S \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & \xi \\ -w & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_Z \\ v_S \end{bmatrix} \quad (48)$$

and the isometry requirement Eq. (44) amounts to the identity

$$\begin{aligned} \hat{v}_S^2 - c^2 \hat{v}_Z^2 &= \gamma^2 (v_S^2 + w^2 v_Z^2 - 2w v_S v_Z \\ &\quad - c^2 v_Z^2 - c^2 v_S^2 \xi^2 - 2c^2 \xi v_S v_Z) \\ &= v_S^2 - c^2 v_Z^2. \end{aligned} \quad (49)$$

The terms linear in v_S cancel by setting $w = -c^2 \xi$ and fulfilment of Eq. (49) implies that $\gamma = \gamma_w := (1 - w^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Hence Eq. (48) becomes

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_Z \\ \hat{v}_S \end{bmatrix} = \gamma_w \begin{bmatrix} 1 & -w/c^2 \\ -w & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_Z \\ v_S \end{bmatrix} = \gamma_w \begin{bmatrix} v_Z - v_S(w/c^2) \\ v_S - v_Z w \end{bmatrix} \quad (50)$$

Since $v_Z = 1$, the ratio between space and time components of the pushed space-time velocity Eq. (50) yields the law of relativistic composition of spatial velocities

$$\frac{\hat{v}_S}{\hat{v}_Z} = \frac{v_S - w}{1 - v_S w/c^2}. \quad (51)$$

The transformation of the basis vectors $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ induced by the tangent transformation $T\zeta_{\text{num}}^{\text{VL}}$ is given by

$$\begin{bmatrix} T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{X}_0 \\ T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \gamma_w \begin{bmatrix} 1 & -w \\ -w/c^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

that is

$$\begin{cases} T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{X}_0 = \gamma_w (\mathbf{Z} - w \mathbf{X}_1), \\ T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{X}_1 = \gamma_w (\mathbf{X}_1 - (w/c^2) \mathbf{Z}), \end{cases} \quad (53)$$

and $T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha$, for $\alpha = 2, 3$.

A tangent vector $\mathbf{X} \in TE$ is called

- *Time-like* if $\mathbf{g}_E(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$,
- *Light-like* if $\mathbf{g}_E(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$,
- *Space-like* if $\mathbf{g}_E(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$.

9.1. Group property

The composition of two VOIGT-LORENTZ transformations in the same longitudinal direction, has a JACOBI matrix given by (only the upper 2×2 submatrix is considered)

$$\begin{aligned} \gamma_u \gamma_w \begin{bmatrix} 1 & w/c^2 \\ w & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u/c^2 \\ u & 1 \end{bmatrix} \\ = \gamma_u \gamma_w \begin{bmatrix} 1 + uw/c^2 & (u+w)/c^2 \\ (u+w) & 1 + uw/c^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

The relativistic composition of spatial velocities is performed, according to Eq. (51), by the function

$$S(u, w) := \frac{u + w}{1 + uw/c^2}, \quad (55)$$

and so, by definition Eq. (41), it follows that

$$\gamma_{S(u, w)} := \left(1 - \left(\frac{u/c + w/c}{1 + uw/c^2} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (56)$$

Setting $\alpha := u/c$ and $\beta := w/c$ we may write

$$\begin{aligned} (\gamma_u \gamma_w)^{-2} &= (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) = 1 - (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \beta^2, \\ \gamma_{S(u, w)}^{-2} &= 1 - (\alpha + \beta)^2 / (1 + \alpha\beta)^2 \\ &= (1 - (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \beta^2) / (1 + \alpha\beta)^2, \\ S(u, w) &= \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} c^2, \end{aligned} \quad (57)$$

whence the equalities

$$\gamma_{S(u,w)} = \gamma_u \gamma_w (1 + uw/c^2), \quad (58)$$

$$\gamma_{S(u,w)} S(u, w) = \gamma_u \gamma_w (u + w), \quad (59)$$

and formula Eq. (54) may be rewritten as

$$\begin{aligned} & \gamma_u \gamma_w \begin{bmatrix} 1 & w/c^2 \\ w & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u/c^2 \\ u & 1 \end{bmatrix} \\ &= \gamma_{S(u,w)} \begin{bmatrix} 1 & S(u, w)/c^2 \\ S(u, w) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

revealing the basic group property of VOIGT-LORENTZ transformations due to POINCARÉ (Poincaré, 1906).

10. RELATIVISTIC EFFECTS

We are now able to comment in a direct manner on some relativistic effects, diffusely discussed in literature since the very beginning of the relativistic era, at the turn from the nineteenth to the twentieth century. It will be seen that usual and consolidated statements ought to be modified.

10.1. Time dilation

Definition 10.1 (World line and Proper time). *A world-line segment is a path $\mathbf{p} : [0, \Delta\lambda] \rightarrow E$ in the events manifold such that the corresponding path-velocity field $\mathbf{p}' : [0, \Delta\lambda] \rightarrow TE$, defined by $\mathbf{p}'(\lambda) := \partial_{\mu=\lambda} \mathbf{p}(\mu)$, is time-like. The proper time-lapse, associated with a world-line segment is the time-length evaluated according to MINKOWSKI pseudo metric tensor field, given by ⁷*

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{PROPER}} &= \frac{1}{c} \int_{\mathbf{p}} \sqrt{\circ} \circ (-\mathbf{g}_E) \circ \text{DIAG} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{\Delta\lambda} (-\mathbf{g}_E(\mathbf{p}'(\lambda), \mathbf{p}'(\lambda)))^{1/2} d\lambda = \frac{1}{c} \Delta s, \end{aligned} \quad (61)$$

where the parameter s , characterised by the property $-\mathbf{g}_E(\mathbf{p}'(s), \mathbf{p}'(s)) = 1$, is the curvilinear abscissa according to the MINKOWSKI pseudo metric.

⁷ The diagonal map $\text{DIAG} : TE \mapsto_E TE \otimes TE$ is defined by $\text{DIAG}(\mathbf{X}) := (\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

By the invariance property $\zeta_E^{\text{VL}} \downarrow \mathbf{g}_E = \mathbf{g}_E$ it follows that the proper time is invariant under VL-transformations. Moreover if the path is a time-line, as defined by Def. 6.1, being $-\mathbf{g}_E(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = c^2$, we have that

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{PROPER}} &:= \frac{1}{c} \int_0^{\Delta t} (-\mathbf{g}_E(\mathbf{p}'(t), \mathbf{p}'(t)))^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{\Delta t} (-\mathbf{g}_E(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}))^{1/2} \circ \mathbf{p}(t) dt = \Delta t. \end{aligned} \quad (62)$$

From Eq. (23) we infer that, in a tuned framing and along a time-line, the elapsed proper time defined by Eq. (61) is equal to the time-lapse defined by Eq. (22), because both are equal to the time increment Δt .

In special relativity the change of frame induced by a VL-transformation $\zeta_E^{\text{VL}} \in C^1(E; E)$ is evaluated according to Eq. (53). If the rate of the clock of an observer is evaluated along the transformed time-arrow detected by another observer in relative translational motion, the result is

$$\langle dt_E, \zeta_E^{\text{VL}} \uparrow \mathbf{Z} \rangle = \langle dt_E, T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{Z} \rangle = \gamma_w \langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle = \gamma_w. \quad (63)$$

The evaluation in Eq. (63) may be enunciated by stating that

- The time *rate* attributed to a *moving* observer, by clocks of the *rest* observer, is *faster* than the time rate measured by the *rest* observer, with amplification according to the relativistic factor.⁸

In a tuned framing $\mathbf{R} = dt_E \otimes \mathbf{Z}$, the time-lapse evaluated by a rest clock along a time-line path $\mathbf{p} : t \in [0, \Delta t] \rightarrow E$, and the time-lapse evaluated by a field of clocks of the framing $\mathbf{R}$ along the path $(\zeta_E^{\text{VL}} \circ \mathbf{p}) : t \in [0, \Delta t] \rightarrow E$ pushed by a VL-transformation $\zeta_E^{\text{VL}} \in C^1(E; E)$, are related by

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_E^{\text{VL}} \circ \mathbf{p}} dt_E &= \int_0^{\Delta t} \langle dt_E, T\zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{Z} \rangle \circ \mathbf{p} d\lambda = \gamma_w \Delta t \\ &> \int_{\mathbf{p}} dt_E = \int_0^{\Delta t} \langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle \circ \mathbf{p} d\lambda = \Delta t. \end{aligned} \quad (64)$$

⁸ This result is *not* in agreement with the statement in (Schutz, 2009, p.19) where, following (Einstein, 1905, p.10), it is said: *the clocks of $\bar{\mathcal{O}}$ will be measured by $\mathcal{O}$ to be running more slowly than those of $\mathcal{O}$* . The disagreement will be commented in Sect. 11.

In this evaluation resort was made to tuning $\langle dt_E, \mathbf{Z} \rangle = 1$, to verticality $\langle dt_E, \mathbf{X}_1 \rangle = 0$, and to the formulae

$$\begin{aligned}\partial_{\mu=\lambda} \mathbf{p}(\mu) &= (\mathbf{Z} \circ \mathbf{p})(\lambda), \\ \partial_{\mu=\lambda} (\zeta_E \circ \mathbf{p})(\mu) &= (T\zeta_E \cdot \mathbf{Z}) \circ \mathbf{p}(\lambda) \\ &= \gamma_w (\mathbf{Z} - w \mathbf{X}_1) \circ \mathbf{p}(\lambda).\end{aligned}\tag{65}$$

We may conclude as follows. The *time-lapse* measured by a field of clocks of an observer along the time line of another observer in relative motion is dilated by the relativistic factor (*time dilation*) when compared with the *time-lapse* measured by a single clock along the time line of the former observer.⁹

We remark that the difference between these time-lapses is due to the fact that the time lapse is evaluated by means of a field of clocks having, with respect to a given observer, variable spatial positions located along the time line of another observer in relative motion.

10.2. Longitudinal length dilation

The *longitudinal-length* of a path of events is defined to be the corresponding increment of longitudinal abscissa. *Longitudinal* means that abscissa develops along the direction of the relative spatial velocity between the frames related by a VL-transformation.

The *longitudinal-length* is sometimes referred to simply as the *length*, but this abuse of nomenclature may become a source of error, because *longitudinal-length* and *length* are the same only if spatial longitudinal straight paths are considered.

Let us now consider a longitudinal path of events, that is a parameterized path $\mathbf{p} : [0, \Delta\lambda] \rightarrow E$ with velocity $\mathbf{p}'(\lambda) := \partial_{\mu=\lambda} \mathbf{p}(\mu) = \mathbf{X}_1$.

⁹ The fairy tale in (Schutz, 2009, 1.13) named *The twin "paradox" dissected*, may be commented upon as follows. DIANA leaves ARTEMIS and goes away for a trip at a speed $w = (24/25)c$ so that $\gamma^{-1} = 0.28$. DIANA's clock measures a time lapse of 14 when she comes back to ARTEMIS. According to Eq. (63), ARTEMIS makes the wrong evaluation that DIANA's clock is faster and estimates a time lapse of $14/.28 = 50$. The roles of DIANA and ARTEMIS can be interchanged. All this is however uninfluential and in fact DIANA and ARTEMIS will both measure on their own clocks a time lapse of 14, irrespective of whether they were or not in relative motion so that, as foreseen by the theory leading to Eq. (25), with reassurance of common sense, they still have the same age at *rendez vous*. The twins paradox is just the consequence of an incorrect conclusion.

The longitudinal-length of the path in a frame adapted to a framing $\mathbf{R} := dt_E \otimes \mathbf{Z}$, is evaluated by the integral

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{X}^1 = \int_0^{\Delta\lambda} \langle \mathbf{X}^1, \mathbf{p}'(\lambda) \rangle d\lambda,$$

where $\mathbf{X}^1$ is the covector field of the dual frame, in duality with the vector field $\mathbf{X}_1$, as defined by Eq. (13).

The abscissa increments along a path $\mathbf{p} : [0, \Delta\lambda] \rightarrow E$ and along the transformed path $\zeta_E \circ \mathbf{p} : [0, \Delta\lambda] \rightarrow E$ are the same when evaluated in push-related natural frames because, for $\alpha = 0, 1, 2, 3$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_E^{\text{VL}} \circ \mathbf{p}} \zeta_E \uparrow \mathbf{X}^\alpha &= \int_0^{\Delta\lambda} \langle \zeta_E \uparrow \mathbf{X}^\alpha, \partial_{\mu=\lambda} (\zeta_E \circ \mathbf{p})(\mu) \rangle d\lambda \\ &= \int_0^{\Delta\lambda} \langle \zeta_E \uparrow \mathbf{X}^\alpha, \zeta_E \uparrow \mathbf{p}'(\lambda) \rangle d\lambda \\ &= \int_0^{\Delta\lambda} \langle \mathbf{X}^\alpha, \mathbf{p}'(\lambda) \rangle d\lambda = \int_{\mathbf{p}} \mathbf{X}^\alpha. \end{aligned} \quad (66)$$

The velocity of the transformed path $\zeta_E^{\text{VL}} \circ \mathbf{p} : [0, \Delta\lambda] \rightarrow E$ is provided by formula Eq. (53)₂ and the longitudinal component is given by

$$\langle \mathbf{X}^1, \zeta_E^{\text{VL}} \uparrow \mathbf{X}_1 \rangle = \langle \mathbf{X}^1, T \zeta_E^{\text{VL}} \cdot \mathbf{X}_1 \rangle = \gamma_w \langle \mathbf{X}^1, \mathbf{X}_1 \rangle = \gamma_w. \quad (67)$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_E^{\text{VL}} \circ \mathbf{p}} \mathbf{X}^1 &= \gamma_w \int_0^{\Delta\lambda} \langle \mathbf{X}^1, \mathbf{X}_1 \rangle dx = \gamma_w \Delta\lambda \\ &> \int_{\mathbf{p}} \mathbf{X}^1 = \int_0^{\Delta\lambda} \langle \mathbf{X}^1, \mathbf{X}_1 \rangle dx = \Delta\lambda. \end{aligned} \quad (68)$$

We may thus conclude that

- An observer who compares the *longitudinal length* of a path of *simultaneous* events with the *longitudinal length* of the pushed path of *non-simultaneous* events according to a VL-transformation, finds that the latter is increased by the relativistic factor (*longitudinal length dilation*).

11. CONCLUSIONS

Turning points outcoming from the analysis of VL-transformations may be resumed as follows.

1. The rate of a clock and the corresponding time-lapse, measured by a clock at rest, i.e. located at a fixed spatial position, appear to be increased by the relativistic factor $\gamma_w := (1 - w^2/c^2)^{-1/2}$ if the measure is performed by nearby clocks acting on the time-line of an observer moving with relative speed w (this effect is called *time dilation* because $\gamma_w \geq 1$). If the relative spatial speed w tends to the light speed c , then the dilated clock-rates and time-lapses tend to infinity.
2. The longitudinal length of a small line of simultaneous events at rest, in the direction of the relative spatial velocity $\mathbf{w}$, appears to be increased by the relativistic factor $\gamma_w := (1 - w^2/c^2)^{-1/2}$ when the longitudinal length is measured along transformed events (*length dilation*). When the relative spatial speed w tends to the light speed c , the longitudinal length tends to infinity.

As one can see, there is a perfect similarity between the two statements, as there is also between the treatments of *time dilation* and *longitudinal length dilation* effects carried out in Sect. 6 and Sect. 10.2.

The former effect of *time dilation* was first enunciated by LARMOR at the end of the nineteenth century (Larmor, 1897). Our result is in accord with the findings of classical treatments of relativistic effects, such as (Lorentz, 1904), (Einstein, 1905), (Born, 1932, p.209) (Feynman, 1964, 15.4 p.154), (Landau and Lifshits, 1987, §3 p.8) and the recent one (Schutz, 2009, 1.8, p.17) for what concerns the fictitious dilation of time intervals, but with *faster* clocks instead of *slower* clocks. Indeed faster clocks measure longer time intervals and are therefore in accord with the *time dilation* effect.

In (Einstein, 1905, p.10) Sect. 4: *Physical Meaning of the Equations Obtained in Respect to Moving Rigid Bodies and Moving Clocks*, the statement concerning clock rates consists in the following affirmation (in our notations): *Between the quantities x, t and $\hat{t}$, which refer to the position of the clock, we have, evidently, $x = wt$ and $\hat{t} = \gamma_w(t - x(w/c^2))$. Therefore $\hat{t} = \gamma_w^{-1}t$. Whence it follows that the time marked by the clock (viewed in the stationary system) is slow...*

The statement that the clock in a moving frame has a slower rate is however an incorrect conclusion.

The reason is that the relation $x = wt$ tells us that the clock is moving with relative velocity w with respect to the frame $\{t, x, y, z\}$ and hence that it stays in the fixed spatial position $\hat{x} = \gamma_w(x - wt) = 0$ in the other frame. The final relation $\hat{t} = \gamma_w^{-1}t$ gives therefore exactly the opposite answer: *the moving clock (which measures the time t) runs faster than the stationary clock*.

In the previous reasoning the clock located at the fixed position $\hat{x} = 0$ measures a time-lapse $\Delta\hat{t}$. According to Eq. (70)₁, the corresponding time-lapse $\Delta t = \gamma_w \Delta\hat{t}$ is measured by clocks located at points whose abscissae range in the interval $\Delta x = \gamma_w (w \Delta\hat{t})$.

In fact clock rates ought to be evaluated by a clock at rest, that is by a clock located at a fixed spatial position and acting on the time-arrow based at that position. Therefore the *faster* rate is in fact a fictitious rate, real rates being invariant under any change of frame, as shown by Eq. (24).

The latter of our findings is the effect of *longitudinal length dilation* which is in opposition to the relativistic *length contraction* effect, enunciated as long ago as 1889 by GEORGE FITZGERALD in (FitzGerald, 1889) and confirmed three years later by HENDRIK LORENTZ in (Lorentz, 1892).

It is instructive to investigate about the proof of the relativistic *longitudinal length contraction* reported by ALBERT EINSTEIN in (Einstein, 1905, p.10).

It consists in considering a spherical surface of radius R at rest in a frame $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ with orthonormal spatial subframe $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$. In terms of the corresponding coordinates $\{t, x, y, z\}$, the space-time trajectory is described by the implicit equation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (69)$$

Equation (69) represents, for each fixed t , a spatial spherical surface in the frame $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$. According to the inverse VL-transformation

$$\begin{cases} t = \gamma_w(\hat{t} + \hat{x}(w/c^2)) \\ x = \gamma_w(\hat{x} + w\hat{t}) \\ y = \hat{y} \\ z = \hat{z} \end{cases} \quad (70)$$

the equation of the trajectory Eq. (69) in the transformed coordinates $\{\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ is given by

$$\gamma_w^2 (\hat{x} + w\hat{t})^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = R^2. \quad (71)$$

Equation (71) represents, for each fixed $\hat{t}$, a spatial ellipsoidal surface in the frame $\{ \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 \}$, with longitudinal radius of length R/γ_w .

The argument in support of FITZGERALD-LORENTZ *longitudinal length contraction*, then reads (Einstein, 1905, p.10): *A rigid body which, measured in a state of rest, has the form of a sphere, therefore has in a state of motion – viewed from the stationary system– the form of an ellipsoid of revolution with the axes $(R\sqrt{1-w^2/c^2}, R, R)$...omissis... the X dimension of the sphere appears shortened by the motion in the ratio $1 : \sqrt{1-w^2/c^2}$.*

This interpretation of the correspondence between the trajectories Eq. (69) and Eq. (71) is however incorrect.

To see this, let us recall that a nontrivial VL-transformation maps a body (that is a set of events laying in a spatial slice of the observer) into a set of events which appear to the same observer as non-simultaneous.

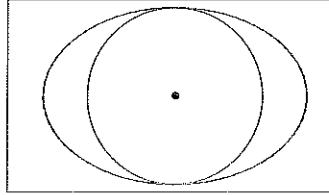
Accordingly, the observer who measures at a fixed time $\hat{t} = \hat{t}_0$ a longitudinal diameter of length $\Delta\hat{x} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1 = 2R/\gamma_w$ between the points at the longitudinal abscissae $\hat{x}_1 = -R/\gamma_w - w\hat{t}_0$ and $\hat{x}_2 = R/\gamma_w - w\hat{t}_0$, of the spatial ellipsoidal surface Eq. (71), will evaluate a difference of longitudinal abscissae $\Delta x = x_2 - x_1 = 2R$, resulting from measurements on the transformed events. Indeed, according to Eq. (70) the longitudinal abscissae will be $x_1 = -R$ at time $t_1 = -Rw/c^2 + \hat{t}_0/\gamma_w$ and $x_2 = R$ at time $t_2 = +Rw/c^2 + \hat{t}_0/\gamma_w$. The increased longitudinal length $\Delta x = 2R$ results then from non-simultaneous measurements with a time lapse $\Delta t = t_2 - t_1 = 2Rw/c^2$.

In a symmetric way, according to the direct VL-transformation

$$\begin{cases} \hat{t} = \gamma_w(t - x(w/c^2)) \\ \hat{x} = \gamma_w(x - wt) \\ \hat{y} = y \\ \hat{z} = z \end{cases} \quad (72)$$

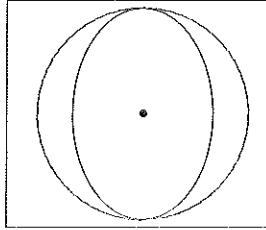
the observer who measures at a fixed time $t = t_0$ a longitudinal diameter of length $\Delta x = x_2 - x_1 = 2R$ of the spatial spherical surface Eq. (69) between the points $x_1 = -R$ and $x_2 = R$, will evaluate a difference $\Delta\hat{x} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1 = 2R\gamma_w$ while measuring the longitudinal abscissae of the transformed events. Indeed, according to Eq. (72)₁, these abscissae are evaluated to be $\hat{x}_1 = \gamma_w(-R - wt_0)$ at time $\hat{t}_1 = \gamma_w(t_0 + Rw/c^2)$ and $\hat{x}_2 = \gamma_w(R - wt_0)$ at time $\hat{t}_2 = \gamma_w(t_0 - Rw/c^2)$. The increased longitudinal length $\Delta\hat{x}$ refers then to non-simultaneous measurements made in the time lapse $\Delta\hat{t} = 2\gamma_wRw/c^2$.

The relativistic effect of *longitudinal length dilation* is exemplified in the sketches below. In the former, a sphere of simultaneous events is evaluated to be a longitudinally dilated ellipsoidal surface resulting from the spatial projection of the transformed, non-simultaneous events.



Longitudinal length dilation of a sphere

Analogously, in the latter, the longitudinally oblated ellipsoidal surface of simultaneous events is evaluated to be a sphere resulting from the spatial projection of the transformed, non-simultaneous events.



Longitudinal length dilation of an ellipsoid

An argument, similar to the one in (Einstein, 1905, p.10), is classically exposed to evaluate the changes in the longitudinal length measurements performed by an observer on a bar at rest and on the bar image detected by another observer in relative longitudinal motion. The evaluation, reported in classical references on relativity such as (Weyl, 1922, p.183), (Born, 1932, p.208), (Landau and Lifshits, 1987, p.11), has been reproduced till recently, see e.g. (Ferrarese and Bini, 2008, 2.11, p.50) and (Schutz, 2009, (1.11) p.18). In these treatments, the length $L = x_2 - x_1$ of a longitudinal bar at rest (i.e. the distance of two simultaneous events located at two very near points along the longitudinal axis) is compared with the longitudinal length $\hat{L} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1$ of the bar image, according to the VL-transformation, at a time $\hat{t}$.

Then from, Eq. (70)

$$L = x_2 - x_1 = \gamma_w(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) = \gamma_w \hat{L}, \quad (73)$$

and the exposed conclusion is that the longitudinal length $\hat{L}$ of the transformed bar image, is smaller than the one L of the bar at rest (FITZGERALD-LORENTZ contraction).

This conclusion is however affected by a subtle but decisive flaw, because L cannot be considered as the length of the bar at rest inasmuch as the end point abscissae x_1 and x_2 , as ruled by Eq. (70)₁, correspond to distinct instants of time, $t_1 = \gamma_w(\hat{t} + \hat{x}_1(w/c^2))$ and $t_2 = \gamma_w(\hat{t} + \hat{x}_2(w/c^2))$.

The correct conclusion is that the length $L = x_2 - x_1$ of the bar at rest at time t (the time is measured by a clock located at the same spatial position of the small bar) is smaller than the longitudinal length $\hat{L}$ of the bar image according to the VL-transformation, which by Eq. (72)₂ is given by

$$\hat{L} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1 = \gamma_w(x_2 - x_1) = \gamma_w L. \quad (74)$$

with the abscissae $\hat{x}_1$ and $\hat{x}_2$ corresponding to two distinct time instants, $\hat{t}_1 = \gamma_w(t + x_1(w/c^2))$ and $\hat{t}_2 = \gamma_w(t + x_2(w/c^2))$.

The fact that both time and longitudinal length are dilated by a VL-transformation is also a direct consequence of the presence of the common factor γ_w in the JACOBI matrix Eq. (52). This amplifying factor does in fact affect both the time component of the transformed time-arrow and the spatial component of transformed spatial vectors.

References

- Born, M., 1932. *Einstein's theory of relativity*. Dover, New York (1962).
- do Carmo, M., 1994. *Differential Forms and Applications*. Universitext, Springer, Berlin.
- Einstein, A., 1905. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik (Berlin)* (17) 891.
- Ferrarese, G., Bini, D., 2008. *Introduction to Relativistic Continuum Mechanics*. Lect. Notes Phys. 727. Springer, Berlin Heidelberg.
- Feynman, R.P., Leighton R.B. & Sands M.L., 1964. *The Feynman Lectures on Physics*. Pearson/Addison-Wesley San Francisco, 2006.
- FitzGerald G.F., 1889. The Ether and the Earth's Atmosphere. *Science* (13) 328–390.
- Landau, L.D., Lifshits, E.M., 1987. *The Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics*, vol. 2 (Fourth revised English ed.). Butterworth-Heinemann, Amsterdam.

- Larmor, J., 1897. A Dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium. Part III. Relations with Material Media. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1897.0020>
- Lorentz, H.A., 1892. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. *Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, 25:363–552.
- Lorentz, H.A., 1904. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, (6) 809–831.
- Marmo, G., Preziosi, B., 2006. The Structure of Space-Time: Relativity Groups. *Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. World Scientific, 3 (3) 591–603.
- Minkowski, H., 1908. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*, 53–111.
- Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., 1973. *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco.
- Poincaré, H., 1906. Sur la dynamique de l'électron, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 21:129–176.
- Romano, G., 2007. *Continuum Mechanics on Manifolds*, Lecture notes, University of Naples Federico II, Italy. <http://wpage.unina.it/romano>
- Romano, G., Barretta, R., Barretta, A., 2009. On Maupertuis principle in dynamics, *Rep. Math. Phys.* **63** (3) 331–346.
- Romano, G., Barretta, R., Diaco, M., 2009. On Continuum Dynamics, *J. Math. Phys.* **50** 102903–1–26.
- Romano, G., Barretta, R., 2011. Covariant hypo-elasticity. *Eur. J. Mech. A Solids*, **30** (6) 1012–1023.
- Romano G., Barretta R., 2013. Geometric Constitutive Theory and Frame Invariance. *Int. J. Non-Linear Mech.* **51**, 75–86.
- Romano, G., Barretta, R., 2013. On Euler's Stretching Formula in Continuum Mechanics. *Acta Mech.* **224**, 211–230.
- Romano, G., Barretta, R., Diaco, M., 2014. Geometric Continuum Mechanics. *Meccanica* **49** (1) 111–133.
- Schutz, B., 2009. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press.
- Voigt, W., 1887. On the Principle of Doppler, *Göttinger Nachrichten* **7**, 41–51.
- Weyl, H., 1922. *Raum-Zeit-Materie*, Springer, Berlin. *Temps-Espace-Matière*, Blanchard, Paris 1922. *Space-Time-Matter*, Dover, New York 1950.
- Whiston, G.S., 1974. Spatially integrable space-times. *General Relativity and Gravitation* (5) 517–524.

Le Conferenze delle Nazioni Unite e il 5° Rapporto dell'IPCC sulle Variazioni Climatiche

Presentata dal socio Guido Barone
(Adunanza del 6 giugno 2014)

Key Words: AR5, Assessment Report, Climate Changes, Global Warming, Greenhouse Effect, IPCC, SPM, Working Groups, United Nation Conferences, COP19.

Abstract – In the last years, two short communications have been published in the *Rendiconti of the Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche*, concerning the United Nation Conferences on the Climatic Changes, taken place respectively at Cancùn, Mexico, (2010) (Barone G. Sassi E.) and at Doha, Qatar, U. A. Emirates, (2012) (Barone G., Caserini S.). Here it is presented a short contribution on the recent publication of the 5th Assessment Report (AR5) of the International Panel on Climate Change (IPCC), the United Nation Agency, whose three Discussion Sessions were tried during the last months of 2013 and the first months of 2014, together with the 19th Conference of Organizing Parties (COP 19) of the UNFCCC (United Nations Framework Convention on Climate Change). These Conferences treat the international negotiation on the investments and commitments for the mitigation of the anthropic causes of the environmental damages,

Riassunto – Negli anni scorsi sono state pubblicate nei Rendiconti dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche due comunicazioni sulle Conferenze delle Nazioni Unite tenutesi a Cancùn, Messico (2010) (Barone G. Sassi E.) e Doha, Qatar, Emirati Arabi Uniti (2012) (Barone G., Caserini S.) sulle Variazioni Climatiche. Qui viene riportato invece un breve resoconto della recente pubblicazione del 5° Rapporto di Valutazione (Fifth Assessment Report – AR5) dell'International Panel on Climate Change (IPCC), l'Agenzia delle Nazioni Unite. Il rapporto è stato articolato in tre volumi e presentato in tre differenti Sessioni di discussione. Esse si sono intervallate, negli ultimi mesi del

Guido Barone – Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti in Napoli. – guido.barone@unina.it

2013 e nel corso dei primi mesi del 2014, con la diciannovesima Conferenza Organizzativa dei Paesi aderenti (COP 19) della UNFCCC (United Nations Framework Convention on Climate Change) che a sua volta conduce i negoziati internazionali sugli investimenti e sugli aiuti per la mitigazione delle cause antropiche dei danni ambientali.

1 – Introduzione

Lo IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) fu istituito nel 1988 dalla Environmental Agency delle Nazioni Unite e dalla World Meteorological Organization (WMO), come Agenzia con il compito di raccogliere, analizzare e organizzare in Rapporti periodici i risultati di tutte le pubblicazioni scientifiche sull'argomento. La Conferenza di Rio (1992) aveva a sua volta istituito la UNFCCC (United Nation Framework Convention on Climate Change) con il compito di coordinare tutti i possibili negoziati e iniziative riguardanti la mitigazione delle variazioni climatiche e l'attribuzione delle responsabilità e degli impegni per attuare opportune politiche di erogazione di fondi a sostegno della comunità internazionale e dei Paesi più poveri.

Nel corso degli anni sono stati pubblicati da parte dell'IPCC quattro Rapporti di Valutazione (Assessment Reports), l'ultimo, AR4, nel 2007. Nel periodo intercorso tra la presentazione dell'AR4 e quella dell'AR5 (2013–14) sono accaduti molti avvenimenti, scanditi dai tentativi di negoziazione per lo stanziamento di fondi da parte dei Paesi aderenti delle Conferenze alla UNFCCC (Conference of Organizing Partners – COP).

Già la terza Conferenza di Kyoto (COP3 1997) aveva proposto, alle 156 Delegazioni Governative presenti, il Protocollo che prevedeva di ridurre entro il 2012 le emissioni di CO₂. Il Protocollo fu però sottoscritto solo da 56 Delegazioni con la riserva di ratifica da parte dei rispettivi Governi e divenne però operativo, sotto forma di Trattato, solo quando fu ratificato anche dalla Russia nel 2005, con il raggiungimento del sufficiente numero minimo previsto di 37 dei 56 Governi iniziali. L'adesione della Russia rientrò nell'ambito di una complessa trattativa con i principali Paesi dell'UE, riguardante le forniture del gas siberiano (Barone G., Caserini S.). Nel 2007 l'IPCC aveva pubblicato il 4th Report (AA.VV. (a)) che servì da base di riferimento del gruppo dei 37 per condurre i negoziati successivi. Infatti alla Conferenza di Bali (COP13, 2007) fu proposta una Road Map per il prosieguo del dopo Kyoto (a partire dal 2013) da approvare nella COP15 di Copenhagen.

Alla COP15 di Copenhagen (2009) la UE propose di limitare l'aumento delle emissioni all'8% per mantenere il Riscaldamento Globale (Global Warming – GW) entro +2°C al 2012, data di scadenza del Trattato di Kyoto. Fu anche attivata la Banca di Compensazione che aveva il compito di condurre degli accordi di scambio di emissioni di CO₂ prodotte dai Paesi industrializzati

con altrettanti crediti dei Paesi scarsamente emettitori, crediti che avrebbero fruttato aiuti economici diretti dai primi. Fu anche attivato il AWG-KP (Adhoc Working Group degli aderenti al Trattato di Kyoto), che avrebbe dovuto condurre trattative intermedie preparatorie tra il gruppo dei 37 da un lato e USA, Cina, India, Australia e Canada dall'altro. Questo gruppo avrebbe quindi operato successivamente mediante la AWG-LCA (AWG Long-term Cooperation Action) tra il gruppo dei 37, i 5 di cui sopra e altri 50 Paesi. Ma Copenhagen fu un mezzo fiasco, per il disimpegno della Delegazione USA e dei grandi Paesi emergenti, Brasile, Cina e India (i cosiddetti BRICS).

A Cancùn (COP16, 2010) i risultati furono invece molto più incoraggianti (Barone G. Sassi E.): presenti 194 Delegazioni che approvarono quasi all'unanimità le risoluzioni finali che prevedevano tra l'altro l'istituzione del Green Climate Fund per cooperare con la World Bank e aiutare i Paesi poveri ad implementare nuove tecnologie eco-compatibili, nonché il REDD Plan (Reduction of Deforestation and forest Degradation). Inoltre fu approvato il piano di supporto e soccorso per i Paesi a rischio di sommersione per la crescita del livello degli oceani (nel 2011 il Governo di Kiribati concluse un trattato per trasferire gli abitanti nelle Isole Fiji, il cui Governo ha loro riservato un proprio territorio al riparo dalle alte maree).

Dopo la pausa di riflessione di Durban (COP17, 2011), le discussioni furono riprese nell'assemblea mondiale di Doha in Qatar (COP 18, dal 26 novembre all'8 dicembre 2012). Si doveva infatti decidere cosa fare dopo la scadenza del Trattato di Kyoto nel 2012 e come riprendere gli impegni delle ultime due Assemblee e delle consultazioni parziali intercorse nel frattempo, malgrado la generale crisi economica internazionale. L'Assemblea di Doha era molto delicata. Le posizioni in campo fra i vari blocchi geopolitici erano molto distanti. Solo l'UE aveva espresso posizioni avanzate in accordo con molti paesi poveri o in via di sviluppo ma non ancora sufficientemente forti economicamente. L'UE aveva infatti annunciato di aver superato nel 2012 l'obiettivo propostosi dell'8% nella riduzione delle emissioni raggiungendo per alcuni Paesi virtuosi il 17%. (L'Italia era in ritardo rispetto alla media). Giappone, Russia, Canada e Nuova Zelanda erano invece fuoriusciti dal Trattato di Kyoto, affiancandosi a USA, Cina, India e Brasile che già non vi avevano aderito.

Le ultime fasi del negoziato tra le delegazioni ministeriali si protrassero ben oltre i tempi previsti, tra mancanza di volontà politica di ridurre drasticamente le emissioni di gas serra, – in particolare da parte degli Stati Uniti, che già prevedevano un grande sviluppo delle estrazioni di gas da scisti bituminosi e altre fonti interne (Barone G.) – e richieste insoddisfatte di un aumento dei fondi per sostenere i paesi in via di sviluppo. Alla fine, dopo una serie di colpi di scena, sotto la ferrea direzione della Presidenza quatarota, fu approvato il *“Doha Climate Gateway”*: (*“una porta di entrata per il futuro”*), con

l'estensione del Trattato di Kyoto, il riconoscimento del risarcimento per danni causati dai cambiamenti climatici e l'impegno dei paesi industrializzati a stanziare per lo meno una somma pari alla media di quanto sborsato in aiuti climatici negli ultimi 3 anni (AA.VV. (b)). Si diede quindi impegno al gruppo di lavoro creato a Durban, per trattare un accordo globale vincolante per tutti entro il 2015, per entrare poi in vigore nel 2020. Si riconobbe per la prima volta il diritto dei paesi insulari al risarcimento per le perdite e i danni subiti a causa dei cambiamenti climatici. Fino all'ultimo rimase aperta la questione finanziaria, (i 30 miliardi di dollari promessi a Copenhagen per il 2010–2012 erano stati onorati solo in parte), e su come reperire 100 miliardi l'anno entro il 2020, malgrado un certo impegno economico della UE e di diversi singoli paesi europei e della Svizzera, per un totale di 6,85 miliardi di dollari in più per il biennio 2011–2012. I rappresentanti dei Governi non riuscirono ad accordarsi su come programmare una riduzione, entro il 2020, del 25–40% dei livelli di emissione rispetto al 1990.

La COP18 riuscì, nonostante tutto, ad avviare il "Second Commitment Period" del Protocollo di Kyoto, o "Kyoto-2", periodo in cui i Paesi industrializzati avrebbero dovuto assumersi impegni al taglio delle emissioni di gas climalteranti dopo il 2012. Dal 1 gennaio 2013 si sono impegnati solo l'Unione Europea, la Svizzera, l'Australia e la Norvegia, responsabili solo del 15% delle emissioni globali. Il rimanente 85% delle emissioni, provengono principalmente dagli Stati Uniti (oltre 17 tonnellate pro capite all'anno di CO₂) e dalla Cina (con poco più di 7 tonnellate pro capite, allora allo stesso livello dell'UE; bisogna però tener conto della popolazione e dell'aumento in corso dei consumi interni). La riduzione di questo restante 85% furono affidate alla gestione di un percorso negoziale non vincolante, ma di "pledge and review", cioè di offerte e revisioni anche bilaterali, con impegni volontari da verificare collettivamente.

I principali passi in avanti del "Doha Climate Gateway" riguardavano quindi tre aspetti:

- 1) l'approvazione di un secondo periodo di impegno del Protocollo di Kyoto dal 2013 al 2020;
- 2) l'approvazione di un meccanismo sul "Loss and Damage", ossia le azioni per prevenire e porre rimedio ai danni causati dai cambiamenti climatici;
- 3) la conclusione dei lavori del Gruppo di Lavoro sugli impegni a lungo termine (AWG-LCA), che ha reso operativi i programmi riguardanti l'adattamento ai cambiamenti climatici e il trasferimento delle tecnologie pulite ai Paesi in via di sviluppo.

Un effetto indiretto, conseguenza dell'ammissione, con il voto favorevole anche dell'Italia, della Autorità Palestinese all'Assemblea delle Nazioni Unite

con lo status di osservatore (come la Città del Vaticano): ciò consente anche allo Stato Palestinese di poter usufruire da ora in poi del supporto finanziario e tecnologico per affrontare problemi come quello dell'acqua.

La presenza di un secondo periodo di impegno è importante per la sopravvivenza del Carbon Market che è una realtà importante in Europa e che in futuro potrà collegarsi ad altri Carbon Market di paesi non europei come l'Australia. Sono stati posti dei limiti importanti ai trasferimenti dei crediti dal primo al secondo periodo d'impegno del Protocollo.

2. – Il Quinto Rapporto dell'IPCC e le ultime Conferenze UNFCCC

Il 5° Rapporto IPCC AR5 era stato progettato nella Conferenza di Budapest del 9–10 aprile 2008, dopo la conclusione definitiva del 4° Rapporto avvenuta nell'anno precedente. Nello stesso 2008 (31 agosto–4 settembre) era stato rinnovato il Consiglio dell'IPCC e nel 2009, in due sessioni tenute ad aprile ad Antalya in Turchia e in luglio a Venezia, era stato messo a punto lo scopo e le linee guida per approntare il 5° Rapporto. Infine a Bali (28–29 ottobre 2009) erano state definite le composizioni e i compiti dei tre Working Groups. Questi erano così articolati:

- Working Group I: CLIMATE CHANGE 2013: The Physical Science Basis.
- Working Group II: CLIMATE CHANGE 2014: Impact, Adaptation and Vulnerability.
- Working Group III: CLIMATE CHANGE 2014: Mitigation of Climate Change.

Negli ultimi mesi del 2013 e durante i primi del 2014 si sono svolti in concomitanza temporale alcune Conferenze dell'UNFCCC: a Varsavia, novembre 2013, la 19th Conference of Organizing Partners (COP 19) e l'incontro supplementare a Bonn, marzo 2014. Il 5° Rapporto completo dell'IPCC è stato presentato in tre fasi successive, man mano che venivano approntate le stesure a cura dei tre gruppi di lavoro (WG), rispettivamente a Stoccolma (IPCC AR5 WG I: settembre 2013), Yokohama (IPCC AR5 WG II: marzo 2014) e Berlino (IPCC AR5 WG III: aprile 2014). Una prima sintesi del Rapporto era già stata presentata a Copenhagen (23–30 ottobre 2013) con l'esposizione delle linee guida che lo avrebbero informato.

La presentazione e pubblicazione del volume del Working Group I sulle Basi Fisiche della Scienza del Clima e le prime indiscrezioni circolate, non sono passate sotto silenzio, dati i pareri molto allarmanti ivi contenuti, circa l'accelerazione, rispetto alle previsioni del recente passato, di tutti gli indicatori ambientali rilevati: dal Riscaldamento Globale (GW), alla fusione dei ghiacci

polari e montani, alla crescita del livello dei mari, all'aumento della turbolenza atmosferica etc.

Sembrerebbe che il parere ormai quasi unanime degli scienziati e ricercatori, sulle responsabilità umane circa il peggioramento delle situazioni non siano neanche più contestate dagli ecoscettici e dai negazionisti. Essi hanno concentrato le loro critiche in altri ambiti. Vi sono solo stati sulla stampa nazionale ed estera i soliti banali commenti (a proposito delle difficoltà incontrate nella Conferenza di Varsavia a trovare pareri unanimi sul che fare): commenti banali perché nelle Conferenze UNFCCC sono presenti delegati governativi portatori di interessi nazionali e sociali ma anche di quelli delle lobby minerarie. Il bilancio di questi interessi può essere solo lentamente spostato in direzione di un maggior sostegno economico ai paesi emergenti e per lo sviluppo di tecnologie innovative a basso o nulla emissione di carbonio. Il dibattito anche molto aspro si è invece aperto con la pubblicazione del successivo volume (WP II AR5) e in misura minore del WP III AR5.

3 – Il Rapporto del primo gruppo di lavoro dell'IPCC (Working Group I)

Il Rapporto WP-I AR5 si è avvalso del lavoro di 209 Autori principali di 600 Coautori e di 50 Revisori editoriali appartenenti a 39 Paesi e di una fitta rete di scambi di opinioni anche con altri scienziati e ricercatori (oltre 54.000 commenti e contributi che hanno coinvolto in due fasi rispettivamente 569 e 800 Revisori). Sono state consultate circa 9200 pubblicazioni su riviste referenziate. Il Rapporto è stato infine presentato, discusso e approvato, Sessione per Sessione, incluso il Summary for Policymakers (vale a dire il Sommario per i Decisori Politici, SPM-1, 35 pagine). Insieme a tutti gli allegati tecnici e scientifici il Rapporto è diventato quindi operativo ed è stato messo a disposizione a pagamento a partire dal 27 settembre 2013, sotto forma di volume cartaceo (**CLIMATE CHANGE 2013: The Physical Science Basis**), ma con disponibilità gratuita per le autorità dei Paesi aderenti e in difficoltà economiche. Il Sommario SPM-1, come tutto il materiale, è stato pubblicato in forma definitiva e messo in commercio sia come edizione elettronica *on-line* sia come volume cartaceo (Alexander L. et al.). Il Rapporto (circa 2000 pagine) è articolato su 14 Capitoli più un Sommario di tutto il materiale tecnico e lo SPM. Esso contiene la struttura dei modelli avanzati Earth System Model, e la loro validazione sulla base di 2 milioni di Gigabyte di dati prodotti e confrontati con le osservazioni utilizzate. Vengono proposte le Previsioni per i periodi 2016–2035 e 2086–2100. Le simulazioni ottenute dai **Modelli Climatici**, globali e regionali, sono state effettuate nell'ambito della iniziativa internazionale **CMIP5** (Coupled Model Intercomparison Project Phase 5) del World Climate Research Programme che ha preso in considerazione 42 modelli,

di cui quasi la metà di nuova generazione. Sono stati altresì riportati in dettaglio, con l'ausilio di un Atlante delle proiezioni climatiche globali e regionali, i risultati di quattro nuovi **Scenari Climatici**, individuati e designati sulla base del supposto aumento della **Forzante Radiativa Totale (FRT)** al 2100, rapportata a quella del 1750: **RCP2.6, RCP4.5, RCP6.0, RCP8.5**, dove le cifre si riferiscono al valore della FRT di 2.6, 4.5, 6.0, 8.5 Watt/m², che sottintendono rispettivamente una forte riduzione della emissione di gas serra rispetto al 1990 (la prima), due possibili politiche di stabilizzazione e infine una politica di "business as usual" cioè di predominio delle politiche energetiche dettate dagli interessi delle lobby dei combustibili fossili e delle industrie ad esse collegate. I risultati di ciascun scenario sono basati su di una scala di **Stime di Incertezza** che tiene conto dell'accordo fra tutte le previsioni sulle variazioni dei parametri climatici; detti scenari possono costituire la base per decidere politiche internazionali di mitigazione delle conseguenze dell'Effetto Serra (Castellari S.).

4 – Le conferme del 5° Rapporto IPCC (AR5) sulle variazioni climatiche (e sulle responsabilità antropiche)

Le principali conclusioni della prima parte del Rapporto WG-I AR5 sono:

- è **estremamente probabile (95–100%)** che più della metà dell'aumento di temperatura superficiale terrestre tra il 1951 e il 2010 sia stato provocato dall'attività umana;
- i 30 anni del periodo 1983–2012 sono con buona confidenza i 30 anni più caldi degli ultimi 1400 anni; lo sono sicuramente dal 1850: l'ultimo decennio è probabilmente il più caldo, anche se stime decennali o quindicinali possono dipendere dalla scelta dell'anno iniziale: l'aumento della temperatura superficiale tra il 1883 e il 2012 è di 0.85°C (più o meno 0.20–0.23); l'aumento tra i valori medi 1850–1900 e 2003–2012 è di 0.78°C (più o meno 0.06–0.07); stime di variazioni annuali sono poco significative;
- è **virtualmente certo (99–100%)** che i primi 700 metri degli oceani si siano riscaldati negli ultimi 40 anni (forse i primi 200 metri più rapidamente dato lo scarso rimescolamento verticale), i primi 75 metri in media di 0.11°C; è probabile che al di sotto dei 700 e fino a 2000 metri gli oceani si siano riscaldati tra il 1957 (prime osservazioni dell'Anno Geofisico Internazionale) e il 2009: è anche probabile che vi sia stato un riscaldamento più recente fino a -3000 metri di profondità in particolare nell'emisfero Sud;
- le calotte glaciali in Antartide hanno perso massa negli ultime venti anni; in particolare nel periodo 2002–2011 alla velocità di 147 Gt/anno, in gran

parte dalla Penisola Antartica Settentrionale e sulle coste occidentali (Steig E.J., Orsi A.J.) del Mare di Amundsen; la perdita della calotta groenlandese è giunta a 215 Gt/anno; complessivamente tutta la **Criosfera** (ghiacciai terrestri e banchisa artica) si sta riducendo (**affidabilità dei dati tra il 66% e il 90% a secondo dei casi**); in particolare la banchisa artica d'estate si è ridotta ogni anno del 9.4–13.6% e la copertura nevosa estiva dell'emisfero Nord in media dello 11.7%; in particolare la copertura e lo spessore del permafrost artico diminuirà con il rilascio di metano dagli idrati e dalle marcite che si andranno formando;

- la crescita del livello medio dei mari è passata da 1.7–2.1 mm/anno del secolo scorso a 3.2 mm/anno negli ultimi 20 anni; il pH medio degli oceani è diminuito di 0.1 a causa dell'assorbimento della CO₂; (**affidabilità dei dati 90–100%**);
- dal 1750 al 2011 si sono infatti riversate 545 miliardi di tonnellate di Carbonio equivalente (GtC) come CO₂ nell'atmosfera e di queste 155 miliardi di tonnellate si sono sciolte nei mari.

I futuri cambiamenti climatici globali e regionali dovuti alle emissioni di CO₂ e altri gas serra (metano, HFC, N₂O, etc.) prevedono un ulteriore **aumento della temperatura superficiale** di 0.3–0.7°C nel periodo 2016–2035, mentre per il 2081–2100 l'incremento raggiungerà tra 0.3 e 1.7°C (scenario RCP2.6), tra 1.1 e 2.6 (scenario RCP4.5), tra 1.4 e 3.1°C (scenario RCP6.0), tra 2.6 e 4.8°C (scenario RCP8.5);

- di conseguenza il livello dei mari potrebbe crescere da un minimo di 260–550 ad un massimo di 450–820 mm secondo gli scenari considerati: questo incremento sarà dovuto per oltre il 35% alla fusione dei ghiacci terrestri e per più del 50% alla espansione termica delle acque;
- le precipitazioni medie diminuiranno in molte aree aride a media latitudine e subtropicali, mentre aumenteranno nelle aree umide a media latitudine e nelle aree umide tropicali e subtropicali; si potranno avere più frequenti e intensi fenomeni di precipitazioni anche di breve periodo, con conseguenti inondazioni, alternate ad ondate di calore.

In definitiva per mantenere l'incremento di temperatura entro i 2°C, non si dovranno emettere più di altre 450 GtC come CO₂ e altri gas serra. Comunque i cambiamenti climatici indotti potranno persistere per secoli.

5 – Nuovi obiettivi della Commissione Europea per il 2030

La Commissione Europea (Presidente la Signora Connie Heedegaard) ha nel frattempo emesso (22 gennaio 2014) una Comunicazione Ufficiale, affermando che l'Unione Europea è molto vicina al raggiungimento degli obiettivi 2020 ("obiettivi 20-20-20": 20% in meno di emissioni come carbonio equivalenti, più 20% di utilizzo delle energie rinnovabili da fonti alternative sul totale prodotto rispetto al 1990). In particolare le emissioni di gas serra sono state ridotte del 18% al 2012 e si prevede una riduzione del 24% al 2020 e del 32% al 2030, sulla base delle politiche già decise. Così la quota parte di energia prodotta da fonti rinnovabili ha raggiunto il 13% e si prevede di toccare il 24% nel 2020 e il 27% al 2030. L'UE utilizza attualmente il 44% dell'energia mondiale di questo tipo (idroelettrico a parte). Per contro il rapporto tra energia prodotta e unità di PIL è stato ridotto del 24% per i risparmi energetici dovuti all'aumento di efficienza soprattutto nei settori industriali.

La Commissione Europea propone come nuovo obiettivo per il 2030 di ridurre del 40% rispetto al 1990 le emissioni di gas serra e di aumentare del 40% la quota di energia rinnovabile rispetto al totale prodotto: fissare questi obiettivi è fondamentale per programmare gli investimenti nella efficienza energetica degli edifici, delle infrastrutture e di tutti i settori strategici con ritorno a lungo termine dei capitali impegnati.

6 – Il Rapporto del secondo gruppo di lavoro dell'IPCC (Working Group II): "CLIMATE CHANGE 2014: Impact, Adaptation and Vulnerability"

Il WP-II AR5 si è avvalso del lavoro di 309 primi autori e revisori di 70 Paesi, di cui 66 hanno contribuito alla scrittura finale del Report. Essi si sono avvalsi anche di una fitta rete di scambi di opinioni con centinaia di altri scienziati e ricercatori (quasi 50.000 commenti e contributi). Sono state consultate oltre 12.000 pubblicazioni. Il Report è stato stampato e messo a disposizione della Conferenza di Yokohama dove è stato accettato (25-29 marzo 2014) ma non approvato in dettaglio, data la mole del rapporto (oltre 2500 pagine), cosa che verrà fatta, dopo attenta analisi, in una successiva Conferenza IPCC che si terrà a Copenhagen nell'ottobre del 2014. Ad ogni modo il testo presentato è stato stampato e messo in rete il 31 marzo e posto a disposizione con le stesse modalità del WPI.

Durante l'estensione del Report uno dei coordinatori di uno dei Capitoli (il Prof. Tol) si è trovato in disaccordo con gli altri compilatori ed ha preferito rinunciare al suo ruolo pur continuando a partecipare ai lavori. Questo è stato uno dei motivi (non il principale) per il rinvio a Copenhagen della approvazione dettagliata del Rapporto stesso.

Nell'ambito delle discussioni tenute a Yokohama è stato però presentato, discusso e **approvato capoverso per capoverso**, durante la notte 29–30 marzo e il giorno successivo, il **Summary for Policymakers 2** (SPM-2, 44 pagine) vale a dire il Secondo Sommario per i Decisori Politici, che quindi è diventato operativo ed è disponibile in rete (Field C.B. et al.).

Il Rapporto WP-II AR5 **“CLIMATE CHANGE 2014: Impact, Adaptation and Vulnerabilità”** è strutturato in due volumi, il primo su 20 Capitoli riguarda gli aspetti globali e settoriali, il secondo su 10 Capitoli riguarda invece singole aree del Pianeta. Esso comprende complessivamente 2562 pagine più una sintesi con molte tabelle e figure, nonché il citato SPM-2 (Caserini S., Castellari S.).

Le principali conclusioni del Rapporto WG-II AR5 sono le seguenti:

- **impatto sulla salute umana.** Quasi sempre alle emissioni di gas climalteranti, di per se dannosi alla salute (escludendo la CO₂), si accompagnano anche emissioni di sostanze tossiche. Spesso per la mancanza di normative o di educazione sanitaria, gli impatti risultano più gravi nei Paesi in via di rapido sviluppo economico. Comunque il riscaldamento globale (GW), a fronte di alcuni benefici locali in aree ristrette, comporterà impatti negativi in molte aree del globo ed essi sopravvanzeranno di gran lunga i benefici riscontrati in altre aree. Si è parlato a lungo sulla stampa dei benefici che ne avrebbero tratto la produzione di cereali e di altre colture nel Canada e in Siberia. Ma solo uno studio, sui 19 considerati nei lavori della commissione, comporterebbe un bilancio globale favorevole per questi benefici rispetto alle devastazioni che avverrebbero nell'Africa, in America latina, in Australia e nell'Asia sub orientale; tutti gli altri studi sottolineano che molte colture agricole subiranno danni permanenti, anche se in qualche area vi saranno dei miglioramenti. Ciò si rifletterà gravemente sui prezzi delle derrate alimentari, favorendo speculazioni, accaparramenti e impoverimento delle regioni produttrici del Sud del mondo. Spesso le politiche dei singoli Paesi produttori saranno impotenti a frenare questi sviluppi;
- **vulnerabilità, condizioni sociali e adattabilità.** Le differenze in termini di vulnerabilità e adattabilità dipendono sostanzialmente da fattori sociali, politici e da processi di sviluppo non omogenei, in gran parte legati anche a fenomeni di corruzione delle classi dirigenti in situazioni di democrazia carente. Le persone e i ceti emarginati socialmente ed economicamente, in base a pregiudizi religiosi, etnici o sessuali sono particolarmente vulnerabili e poco adattabili a variazioni climatiche.
- **vulnerabilità e differenze regionali.** In molte regioni del Pianeta le alterazioni nei regimi delle piogge e delle precipitazioni nevose e nella estensione e stabilità dei ghiacci stanno provocando modifiche nei sistemi

idrogeologici, impattando sulle risorse idriche disponibili per l'agricoltura, per l'allevamento e per la disponibilità di acqua potabile. Eventi estremi, come ondate di calore, incendi, siccità, inondazioni, nubifragi, uragani e tifoni stanno dimostrando la grande vulnerabilità anche delle società sviluppate e di molti ecosistemi. Per quanto proposte e progetti di adattamento stiano entrando nei processi di pianificazione, i benefici non potranno essere efficaci a breve termine. Infine i cambiamenti climatici potrebbero favorire massicci fenomeni di emigrazione con ulteriore aumento della fragilità strutturale dei Paesi poveri.

- **vulnerabilità delle aree europee.** Le aree mediterranee del Sud Europa sono particolarmente a rischio di evolvere verso un clima subtropicale, con larghe sacche di inaridimento del suolo. In conseguenza agricoltura, aree forestali e in genere ecosistemi naturali subiranno gravi danni, con rischio di estinzione di alcune specie. I costi per la manutenzione delle infrastrutture, per il condizionamento degli edifici e per tutti i servizi per il turismo subiranno delle levitazioni anche cospicue. Il fabbisogno di acqua per l'irrigazione entrerà in competizione con quello per usi domestici, per i servizi e per i settori industriali. Tutto ciò richiederà delle politiche di adattamento con dei costi che aumenteranno tanto più in futuro quanto più dette politiche ritarderanno ad essere applicate. L'aumento di temperatura nelle regioni del Centro-Nord Europa porteranno dei benefici per alcuni tipi di colture agricole, ma aumenteranno i rischi dovuti all'aumento delle precipitazioni, con pericolo di inondazioni. Al contrario nelle aree più interne della Russia orientale si potranno avere siccità ed aumento degli incendi boschivi anche estesi.

A questo punto le reazioni della stampa e dei circoli negazionisti sono state piuttosto forti, oscillando tra la affermazione che le conclusioni del Rapporto fossero prive di reali basi scientifiche, alla negazione che vi sia un reale aumento del riscaldamento globale, e quondanche che le sue conseguenze non siano gravi, fino ad affermare che, senza particolari impegni economici, l'adattamento alle variazioni climatiche possano essere gestite con gli usuali meccanismi di compensazione dei mercati. Negli USA vi sono state vere e proprie campagne denigratorie contro i più famosi climatologi, campagne orchestrate da alcuni economisti finanziati da fondi delle lobby minerarie. Qualche riflesso si è avuto anche sulla stampa italiana.

Di recente però il Presidente Obama ha proclamato una serie di impegni a favore delle energie alternative fino al 2030. D'altra parte lo stesso Obama ha sostenuto decisamente gli impegni per l'utilizzo del gas dalle sabbie bituminose anche in vista di una possibile crisi tra UE e Russia a causa del conflitto sull'Ucraina. A sua volta il presidente Putin ha risposto con un grande accordo con la Cina per l'utilizzo del gas siberiani.

7 – Il Rapporto del terzo gruppo di lavoro dell'IPCC (Working Group III): “CLIMATE CHANGE 2014: Mitigation of Climate Change”

Infine il WP III AR5 si è avvalso del lavoro di 235 autori responsabili di capitoli e 180 collaboratori provenienti da 57 Paesi, nonché di 38 revisori e di una rete di scambi di opinioni anche con altri 900 scienziati e ricercatori (oltre 38.000 commenti e contributi) ed è stato messo a disposizione della Conferenza di Berlino (7–12 aprile scorso), dove è stato approvato assieme al **Summary for Policymakers 3** (SPM-3 (Edenhofer O. et al.)) ed è stato stampato e pubblicato con le stesse modalità dei due precedenti Rapporti WP I e WP II.

Il Rapporto è articolato su 16 capitoli più 3 annessi e due allegati tecnici su oltre 2000 pagine ed è suddiviso in tre parti:

- inquadramento delle questioni che richiedono l'attivazione di processi di mitigazione;
- le diverse procedure per attuare i percorsi di mitigazione;
- la valutazione delle politiche del quadro istituzionale e i finanziamenti necessari.

La prima parte ricapitola di fatto tutto il materiale trattato nei precedenti Report dei Working Group I e II. In particolare viene sottolineato che, nonostante le misure già attuate da numerosi Paesi, le emissioni di gas serra hanno continuato a crescere negli ultimi anni soprattutto, ma non solo, per l'incremento dell'uso del carbone. La crisi economica degli anni scorsi ha solo provocato un temporaneo rallentamento nella crescita delle emissioni. La ripresa della crescita economica globale e l'incremento demografico hanno invece giocato un ruolo decisivo. Si ricordano qui quattro messaggi essenziali:

- Nonostante le misure di riduzione già attuate in vari Paesi, le emissioni di gas serra stanno crescendo. Sono già disponibili varie opzioni (politiche e tecnologiche) per ridurre tali emissioni.
- La stabilizzazione delle concentrazioni atmosferiche dei gas serra richiede misure di riduzione delle emissioni in maniera integrata e sinergica in settori chiave della nostra società: la produzione e uso dell'energia, i trasporti, l'edilizia, le industrie, l'uso del suolo e gli insediamenti umani.
- Limitare gli effetti dei cambiamenti climatici attraverso la mitigazione può contribuire allo sviluppo sostenibile, all'equità e all'eliminazione della povertà.

- Le politiche climatiche necessarie per mantenere l'aumento della temperatura media globale al di sotto della soglia di $+2^{\circ}\text{C}$ rispetto ai livelli preindustriali, poco più di 1°C rispetto ai livelli attuali, richiederanno riduzioni sostanziali delle emissioni di gas serra (40–70% rispetto ai livelli del 2010) da attuarsi entro il 2050 e emissioni nulle di gas serra entro la fine di questo secolo per giungere ad una società carbon-free.

In definitiva per adempiere agli accordi già raggiunti, s'impone un'inversione di rotta.

8 – Conclusioni

Le conclusioni del 5th Report IPCC contengono diverse considerazioni che qui riassumiamo:

- Le posizioni dei singoli Paesi debbono essere armonizzati tramite trattati internazionali il più estesi possibili. Gli interessi delle lobby minerarie possono spingere le classi dirigenti di singole nazioni all'incremento e non alla riduzione delle emissioni. Sforzi unilaterali vengono resi inutili dall'incremento più che proporzionale delle emissioni di altri Paesi e di altre fasce socio-economiche. I trattati tra le nazioni contraenti, che tengano conto degli interessi delle fasce socio-economiche, permettono azioni più concrete ed efficaci, senza rimanere lettera morta.
- È quindi necessario utilizzare modelli che attribuiscono un valore differente ai benefici (e ai costi) sostenuti dai diversi ceti. Tali “pesi distributivi” spesso non vengono inseriti nei modelli economici utilizzati da molti economisti. Se ben gestite, le intersezioni con politiche di sviluppo sostenibile, quali la sicurezza alimentare, la salute umana, la qualità dell'ambiente su scala locale, l'accesso all'energia, rafforzerebbe il supporto alle politiche di mitigazione.
- Su questo tema, **i modelli economici basati solo sul PIL**, invece che integrare le varie dimensioni dello sviluppo e ancor meno lo sviluppo sostenibile, **sono insufficienti**, come da tempo pone l'Unione Europea: bisogna andare oltre il PIL nazionale (“**beyond GDP**”) (Caserini S. et al.).

Occorre quindi riconoscere l'eterogeneità degli agenti economici, poiché *individui diversi mostrano parametri e regole decisionali differenti. Occorre quindi prendere in considerazione adeguata i processi decisionali, le percezioni, i valori.* La stessa dotazione di ricchezza ne può costituire un presupposto materiale di tali elementi, coi ricchi che la pensano in modo diverso dai poveri. Tutto questo perché *i cambiamenti negli stili di vita e nei comportamenti possono fin d'ora ridurre dal 20% al 50% le emissioni (nel*

settore dell'edilizia). Le decisioni di acquisto di beni durevoli (es. una casa in classe energetica A) possono fare la differenza in tal senso (Piana V.). Imboccare nei singoli Paesi la strada di parametri legislativi ed economici che rendano obbligatoria o molto conveniente la scelta a basse emissioni può fin da subito fare imboccare la traiettoria necessaria per un'azione urgente di mitigazione ambiziosa. Gli sviluppi infrastrutturali non sono reversibili nel breve periodo e debbono essere programmati con lungimiranza così i prodotti durevoli che altrimenti spingono a percorsi di emissioni pluriennali.

Riferimenti bibliografici

- AA.VV. (a), "Climate Change 2007", The Fourth Assessment Report of the IPCC, Cambridge Univ. Press, 2007.
- AA.VV. (b), "Summary of the Doha Climate Change Conference: 26 november–8 december 2012", International Institute for Sustainable Development (IISD), Vol. 12 No. 567, December 11th, 2012.
- AA.VV. (c), "IPCC Statment, March 27th, 2014", www.ipcc.ch.
- Alexander L. et al., "Summary for the CLIMATE CHANGE 2013: The Physical Science Basis", IPCC September 27th, 2013.
- Barone G., "Estrazione di gas mediante fratturazione idraulica delle rocce scistose: prospettive di sviluppo e pericoli ambientali", Rend. Accad. Sc. Fis. Mat., LXXIX, 5–10, 2012.
- Barone G., Caserini S., "Le Conferenze delle Nazioni Unite sulle variazioni climatiche", Rend. Accad. Sc. Fis. Mat., LXXX, 29–35, 2013.
- Barone G., Sassi E., "The United Nation Conferences on Climate Change", Rend. Accad. Sc. Fis. Mat., LXXVIII, 79–88, 2011.
- Caserini S., Castellari S., "Non ci sono pasti gratis, ma non è un pasto gratis", post sul Blog di "Climalteranti" www.climalteranti.it, 13, aprile 2014.
- Caserini S., Messori G., Piana V., "Quarto Rapporto IPCC: (molti) impatti, (poco) adattamento, (grandi) vulnerabilità", post sul Blog di "Climalteranti" www.climalteranti.it, 31 marzo 2014.
- Castellari S., "I 195 Paesi membri dell'IPCC hanno approvato il nuovo Rapporto sulle Basi Fisiche dei cambiamenti climatici", Comunicato del Focal Point dell'IPCC per l'Italia, CEMCC, www.cmcc.it, 27 settembre 2013.
- Edenhofer O. et al., "Summary for the CLIMATE CHANGE 2014: Mitigation of Climate Change", IPCC, April 14th, 2014.
- Field C.B. et al., "Summary for the CLIMATE CHANGE 2014: Impacts, Adaptation and Vulnerability", IPCC, March, 31st, 2014.
- Piana V., "Mitigare è possibile, ma va fatto presto e in profondità", post sul Blog di "Climalteranti" www.climalteranti.it, 16 aprile 2014.
- Steig E.J., Orsi A.J., "The heat is on in Antarctica", Nature Geoscience, News & Views, February 27th 2013, *on-line*.

Si ringraziano Antognazza F., Bocchiola D., Coyaoud S. (Oca Sapiens), Cacciamanni C., Gabrielli P. e Lombroso L., oltre ai già citati Caserini, Castellari, Piana del gruppo di discussione **Climalteranti** per le informazioni scambiate nei mesi precedenti

l'elaborazione di questo testo. Il gruppo **Climalteranti** ha contribuito a far pubblicare una **Errata Corrigé** da parte degli estensori del primo Volume del Rapporto 2013.

Higher integrability from general Reverse Hölder Inequalities

Nota di M.R. Formica¹, M. Pietroluongo² e C. Sbordone³

Presentata dal socio C. Sbordone
(Adunanza del 6 giugno 2014)

Key words: Reverse Hölder inequality, Gehring class, Muckenhoupt class, exponent of integrability.

Abstract - We give higher integrability results for B_p^q classes of functions satisfying general reverse Hölder inequalities, in one dimensional case. Furthermore we find the optimal integrability exponents in these classes.

Riassunto - Si provano risultati di migliore integrabilità per le classi B_p^q di funzioni soddisfacenti disuguaglianze inverse di Hölder generali, nel caso unidimensionale. Inoltre si determinano gli esponenti ottimali di sommabilità in queste classi.

1 - INTRODUCTION

Let E be a measurable set of $\mathbb{R}^n$ with positive Lebesgue measure $|E|$, and $p, q \in \mathbb{R} - \{0\}$ such that $p < q$. A nonnegative measurable function f on E belongs to the $B_p^q(K)$ class if there exists a constant $K > 1$ such that the *Reverse Hölder Inequality*

$$\left(\int_Q f^q(x) dx \right)^{1/q} \leq K \left(\int_Q f^p(x) dx \right)^{1/p} \quad (1.1)$$

holds for all cubes $Q \subset E$. Here $\int_Q$ stands for $\frac{1}{|Q|} \int_Q$.

¹Dipartimento di Studi Economici e Giuridici, Università degli Studi di Napoli "Parthenope", Via Generale Parisi 13, Palazzo Pacanowsky, 80132, Napoli, Italy. maria.formica@uniparthenope.it

²Dipartimento di Studi Aziendali ed Economici
Università degli Studi di Napoli "Parthenope" Via Generale Parisi 13, Palazzo Pacanowsky, 80132, Napoli, Italy.
pietroluongo@uniparthenope.it

³Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Via Cintia, 80126, Napoli, Italy. sbordone@unina.it

The B_p^q -norm of f is defined as

$$B_p^q(f) = \sup_{Q \subset E} \frac{\left(\int_Q f^q(x) dx \right)^{1/q}}{\left(\int_Q f^p(x) dx \right)^{1/p}}. \quad (1.2)$$

Therefore $f \in B_p^q(K)$ if and only if $B_p^q(f) < \infty$. Moreover

$$f \in B_p^q(K) \quad \Leftrightarrow \quad f^p \in B_1^{q/p}(K^p) \quad \Leftrightarrow \quad f^q \in B_{p/q}^1(K^q).$$

The $B_p^q(K)$ classes, introduced by (Bojarski (1985)) and (Wik (1992)), include the particular cases of the *Gehring class* $G_q(K)$ (Gehring (1973)) and the *Muckenhoupt class* $A_p(K)$ (Muckenhoupt (1972)) of nonnegative measurable functions f on E satisfying respectively

$$\left(\int_Q f^q(x) dx \right)^{1/q} \leq K \int_Q f(x) dx, \quad \forall Q \subset E, \quad 1 < q < \infty \quad (1.3)$$

$$\int_Q f(x) dx \left(\int_Q f^{\frac{1}{1-p}}(x) dx \right)^{p-1} \leq K, \quad \forall Q \subset E, \quad 1 < p < \infty \quad (1.4)$$

where clearly is

$$G_q(K) = B_1^q(K) \quad (1.5)$$

and

$$A_p(K) = B_{\frac{1}{1-p}}^1(K) \Leftrightarrow A_{\frac{p}{p-1}}(K) = B_p^1(K). \quad (1.6)$$

Furthermore is easily seen that

$$G_q(f)^{1/q'} = B_1^q(f) \quad (1.7)$$

and

$$A_p(f) = B_{\frac{1}{1-p}}^1(f), \quad (1.8)$$

where, for $1 < p, q < \infty$, it is

$$G_q(f) = \sup_{Q \subset E} \left[\frac{\left(\int_Q f^q(x) dx \right)^{1/q}}{\left(\int_Q f(x) dx \right)} \right]^{q'}, \quad q' = \frac{q}{q-1} \quad (1.9)$$

and

$$A_p(f) = \sup_{Q \subset E} \int_Q f(x) dx \left(\int_Q f^{\frac{1}{1-p}}(x) dx \right)^{p-1}. \quad (1.10)$$

The following properties hold:

$$B_p^q(K) \subset B_p^r(K), \quad p < r \leq q, \quad (1.11)$$

$$B_p^q(K) \subset B_r^q(K), \quad p \leq r < q. \quad (1.12)$$

Optimal integrability results in one dimensional case were established by (D'Apuzzo-Sbordone (1990)) and (Korenovskii (1992)) concerning to G_q and A_p classes respectively, for monotonic functions. Later the previous results were unified by (Popoli (1997)) and (Sbordone (2005)) in more general B_p^q classes and furthermore the monotonicity assumption was removed (see also Korenovskii (2007)).

Our aim is to emphasize these results for B_p^q classes in one dimensional case giving precise estimates for the corresponding B_p^q -norms. Moreover we prove that these results are sharp.

For other details related to Gehring and Muckenhoupt classes we refer also to (Malakiano, 2001, 2002; Farroni, R. Giova, 2013; Franciosi-Moscariello, 1985).

2 - PRELIMINARY RESULTS

Here we recall some definitions and preliminary results.

Lemma 2.1. (Popoli (1997)) *Let $C > 1$ and $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ with $0 < a < b$ or $b < 0 < a$. Let γ_C be defined for $y \in [0, 1]$ as*

$$\gamma_C(a, b, y) = 1 - C^b(1 - y) \left(\frac{b}{b - ay} \right)^{b/a}. \quad (2.1)$$

Then, there exists an unique solution y_b of the equation

$$\gamma_C(a, b, y) = 0. \quad (2.2)$$

Moreover $\gamma_C(a, b, y) > 0$ iff $y \in (y_b, 1]$.

Lemma 2.2. (Popoli (1997)) *Let $f \in B_p^q(K)$ be a nonnegative function in $L^\infty(a, b)$. Then*

for $p > 0$

$$\int_a^b (x - a)^{\alpha-1} f^q(x) dx \leq \frac{(b - a)^{\alpha-1}}{\gamma_K(p, q, \alpha)} \int_a^b f^q(x) dx, \quad \forall \alpha \in (y_q, 1] \quad (2.3)$$

where y_q is the unique solution of the equation $\gamma_K(p, q, y) = 0$ with $y = q/x$,

for $p < 0$

$$\int_a^b (x - a)^{\alpha-1} f^p(x) dx \leq \frac{(b - a)^{\alpha-1}}{\gamma_{1/K}(q, p, \alpha)} \int_a^b f^p(x) dx, \quad \forall \alpha \in (y_p, 1] \quad (2.4)$$

where y_p is the unique solution of the equation $\gamma_{1/K}(q, p, y) = 0$ with $y = p/x$, and with γ_C defined as in Lemma 2.1.

Lemma 2.3 (Hardy et al. (1929)). *Let $f \in L^s(E)$ be a nonnegative and non-increasing [non-decreasing] function on $E \subset \mathbb{R}$. Then, for $0 < r \leq s$ [$s \leq r < 0$],*

$$\left(\int_a^b f^s(x) dx \right)^{r/s} \leq \frac{r}{s} \int_a^b (x-a)^{r/s-1} f^r(x) dx \quad (2.5)$$

for any $(a, b) \subset E$.

Now we recall an important result, due to (Korenovskii (1992)) (see also Sbordon (1986)), on relationships between functions in Reverse Jensen Inequality and their rearrangements.

Namely, let Φ be the class of nonnegative convex functions φ on $(0, +\infty)$ and for $\varphi \in \Phi$ let $L_\varphi(E)$ the Orlicz class of functions f such that

$$\varphi(f) \in L^1(E).$$

A function $f \in L_\varphi(E)$ belongs to the class $B_\varphi(S)$ if satisfies the *Reverse Jensen Inequality*

$$\int_Q \varphi(f) \leq S \varphi\left(\int_Q f\right), \quad \forall Q \subset E \quad (2.6)$$

with

$$S = S(\varphi, f, E) = \sup_{Q \subset E} \frac{\int_Q \varphi(f)}{\varphi\left(\int_Q f\right)} < \infty \quad (2.7)$$

where the supremum is taken over all cubes $Q \subset E$.

It is easy to check that for $\varphi(t) = t^q$ ($q > 1$), we have

$$B_\varphi(S) = G_q(S^{1/q}) = B_1^q(S^{1/q}) \quad (2.8)$$

and for $\varphi(t) = t^{\frac{p}{1-p}}$ ($p > 1$), we have

$$B_\varphi(S) = A_p(S^{p-1}) = B_{\frac{1}{p-1}}^1(S^{p-1}). \quad (2.9)$$

Let E be a measurable set of $\mathbb{R}^n$ having finite Lebesgue measure $|E|$ and let f be a measurable function on E . The *distribution function* μ_f of f is defined as

$$\mu_f(t) = |\{x \in E : |f(x)| > t\}|, \quad t \geq 0.$$

The non-increasing rearrangement of f is the function $f^* : [0, |E|] \rightarrow [0, +\infty]$ defined as

$$f^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu_f(t) \leq s\}, \quad s \geq 0.$$

The non-decreasing rearrangement of f is given by

$$f_*(s) = f^*(|E| - s), \quad s \in [0, |E|].$$

The equimeasurability of f^* , f_* and $|f|$ implies that

$$\int_0^{|E|} \varphi(f^*(u)) du = \int_0^{|E|} \varphi(f_*(u)) du = \int_E \varphi(|f(x)|) dx \quad (2.10)$$

for every monotone function φ on $[0, +\infty)$ (see e.g. Korenovskii (2007a)).

Theorem 2.4 (Korenovskii (1992)). *Let $\varphi \in \Phi$ and $f \in B_\varphi(S)$ on an interval $E \subset \mathbb{R}$. Then*

$$S(\varphi, f^*, [0, |E|]) = S(\varphi, f_*, [0, |E|]) \leq S(\varphi, f, E),$$

that is

$$\sup_{I \subset (0, |E|)} \frac{\int_I \varphi(f^*(t)) dt}{\varphi\left(\int_I f^*(t) dt\right)} = \sup_{I \subset (0, |E|)} \frac{\int_I \varphi(f_*(t)) dt}{\varphi\left(\int_I f_*(t) dt\right)} \leq \sup_{J \subset E} \frac{\int_J \varphi(f(t)) dt}{\varphi\left(\int_J f(t) dt\right)}$$

where f^* and f_* are, respectively, the non-increasing and non-decreasing rearrangements of f .

3 - MAIN RESULT

In this Section we begin to prove higher integrability results.

Theorem 3.1. *Let $f \in B_p^q(K)$ be a nonnegative measurable function on $E \subset \mathbb{R}$. Let x_0 the unique solution of the equation*

$$\left(\frac{x}{x-q}\right)^{\frac{1}{q}} = K \left(\frac{x}{x-p}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1)$$

If $0 < p < q$ then $f \in B_p^s(K)$ for $q \leq s < x_0$ and

$$B_p^s(f) \leq B_p^q(f) \left[\frac{q}{s\gamma_K(p, q, \frac{q}{s})} \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (3.2)$$

If $p < 0 < q$ then $f \in B_s^q(K)$ for $x_0 < s \leq p$ and

$$B_s^q(f) \leq B_p^q(f) \left[\frac{p}{s\gamma_{1/K}(q, p, \frac{p}{s})} \right]^{-\frac{1}{p}}. \quad (3.3)$$

Proof. Let $f \in B_p^q(K)$, then

$$\left(\int_J f^q \right)^{1/q} \leq K \left(\int_J f^p \right)^{1/p} \quad (3.4)$$

for any $J \subset E$.

First suppose $0 < p < q$. If we set $g = f^p$, (3.4) can be written as

$$\left(\int_J g^{q/p} \right) \leq K^q \left(\int_J g \right)^{q/p}. \quad (3.5)$$

Then $g \in B_\varphi(K^q)$ with $\varphi(t) = t^{q/p} \in \Phi$. By Theorem 2.4 the non-increasing rearrangement g^* of g satisfies

$$\left(\int_I (g^*)^{q/p} \right) \leq K^q \left(\int_I g^* \right)^{q/p}, \quad (3.6)$$

for any $I \subset (0, |E|)$.

Raising both sides of (3.6) to the power p/q we get $g^* \in B_1^{q/p}(K^p)$. By using truncated functions we can construct a sequence of non-increasing functions $g_h \in L^\infty(0, |E|)$ such that $g_h \rightarrow g^*$ in $L^{q/p}(0, |E|)$ and verifying (3.6) for each h with the same constant K^q .

Hence functions g_h satisfy the assumptions of Lemma 2.2 so, for each h and for any $(a, b) \subset (0, |E|)$ we have

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} g_h^{q/p} dx \leq \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\gamma_{K^p}(1, q/p, \alpha)} \int_a^b g_h^{q/p} dx, \quad \forall \alpha \in (y_q, 1], \quad (3.7)$$

where y_q is the unique solution of the equation $\gamma_{K^p}(1, q/p, y) = 0$ with $y = q/x$.

If $y_q = q/x_0$ and $\alpha = q/s$, we have $0 < q/x_0 < q/s \leq 1$, then $q \leq s < x_0$.

We note that

$$\gamma_{K^p}(1, q/p, q/x) = \gamma_K(p, q, q/x) \quad (3.8)$$

and the unique solution x_0 to the equation (3.1) is the unique solution to the equation $\gamma_K(p, q, q/x) = 0$.

Passing to the limit as $h \rightarrow +\infty$ in (3.7), for $\alpha = q/s$ and using (3.8), we get

$$\int_a^b (x-a)^{q/s-1} (g^*)^{q/p} dx \leq \frac{(b-a)^{q/s-1}}{\gamma_K(p, q, q/s)} \int_a^b (g^*)^{q/p} dx. \quad (3.9)$$

Applying Lemma 2.3 with $r = q/p$ and $s = s/p$ we have

$$\left(\int_a^b (g^*)^{s/p} dx \right)^{q/s} \leq \frac{q}{s \gamma_K(p, q, q/s)} \int_a^b (g^*)^{q/p} dx.$$

Replacing $g = f^p$, we have

$$(g^*)^{s/p} = (g^{s/p})^* = (f^s)^* = (f^*)^s \quad \text{and} \quad (g^*)^{q/p} = (g^{q/p})^* = (f^q)^* = (f^*)^q,$$

then

$$\left(\int_a^b (f^*)^s dx \right)^{q/s} \leq \frac{q}{s \gamma_K(p, q, q/s)} \int_a^b (f^*)^q dx,$$

that implies

$$\left(\int_a^b (f^*)^s dx \right)^{1/s} \leq \left[\frac{q}{s \gamma_K(p, q, q/s)} \right]^{1/q} \left(\int_a^b (f^*)^q dx \right)^{1/q}.$$

If in particular we choose $(a, b) = (0, |J|) \subset (0, |E|)$, we have

$$\left(\int_0^{|J|} (f^*)^s dx \right)^{1/s} \leq \left[\frac{q}{s \gamma_K(p, q, q/s)} \right]^{1/q} \left(\int_0^{|J|} (f^*)^q dx \right)^{1/q}.$$

By (2.10) it follows that

$$\left(\int_J f^s dx \right)^{1/s} \leq \left[\frac{q}{s \gamma_K(p, q, q/s)} \right]^{1/q} \left(\int_J f^q dx \right)^{1/q}.$$

Dividing by $\left(\int_J f^p dx \right)^{1/p}$ and passing to the supremum over all $J \subset E$ on both sides, we obtain (3.2).

Now we consider the case $p < 0 < q$. By (3.4), raising both sides to the power $p < 0$, we get

$$\int_J f^p dx \leq K^{-p} \left(\int_J f^q dx \right)^{p/q}$$

for any $J \subset E$.

Setting $g = f^q$, the previous inequality becomes

$$\int_J g^{p/q} dx \leq K^{-p} \left(\int_J g dx \right)^{p/q}.$$

Then $g \in B_\varphi(K^{-p})$ with $\varphi(t) = t^{p/q} \in \Phi$. By Theorem 2.4 the non-decreasing rearrangement g_* of g satisfies

$$\int_I (g_*)^{p/q} dx \leq K^{-p} \left(\int_I g_* dx \right)^{p/q} \quad (3.10)$$

for any $I \subset (0, |E|)$.

Raising both sides to the power $q/p < 0$ we have $g_* \in B_{p/q}^1(K^q)$.

By using non-decreasing functions and inequality (2.4) of Lemma 2.2 we get

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} (g_*)^{p/q} dx \leq \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\gamma_{1/K^q}(1, p/q, \alpha)} \int_a^b (g_*)^{p/q} dx, \quad (3.11)$$

where y_p is the unique solution of the equation $\gamma_{1/K^q}(1, p/q, y) = 0$ with $y = p/x$.

If $y_p = p/x_0$ and $\alpha = p/s$, we have $0 < p/x_0 < p/s \leq 1$, then $x_0 < s \leq p$.

We note that

$$\gamma_{1/K}(1, p/q, p/x) = \gamma_{1/K}(q, p, p/x) \quad (3.12)$$

and the unique solution x_0 to the equation (3.1) is the unique solution to the equation $\gamma_{1/K}(q, p, p/x) = 0$.

For $\alpha = p/s$ and using (3.12), inequality (3.11) becomes

$$\int_a^b (x-a)^{p/s-1} (g_*)^{p/q} dx \leq \frac{(b-a)^{p/s-1}}{\gamma_{1/K}(q, p, p/s)} \int_a^b (g_*)^{p/q} dx. \quad (3.13)$$

Applying Lemma 2.3 with $r = p/q$ and $s = s/q$ we have

$$\left(\int_a^b (g_*)^{s/q} dx \right)^{p/s} \leq \frac{p}{s \gamma_{1/K}(q, p, p/s)} \int_a^b (g_*)^{p/q} dx.$$

Replacing $g = f^q$, we have (see e.g. Korenovskii (2007))

$$(g_*)^{s/q} = (g^{s/q})^* = (f^s)^* = (f_*)^s \quad \text{and} \quad (g_*)^{p/q} = (g^{p/q})^* = (f^p)^* = (f_*)^p,$$

then

$$\left(\int_a^b (f_*)^s dx \right)^{p/s} \leq \frac{p}{s \gamma_{1/K}(q, p, p/s)} \int_a^b (f_*)^p dx,$$

and raising both sides to the power $-1/p > 0$ we get

$$\left(\int_a^b (f_*)^s dx \right)^{-1/s} \leq \left[\frac{p}{s \gamma_{1/K}(q, p, p/s)} \right]^{-1/p} \left(\int_a^b (f_*)^p dx \right)^{-1/p}.$$

If in particular we choose $(a, b) = (0, |J|) \subset (0, |E|)$, we have

$$\left(\int_0^{|J|} (f_*)^s dx \right)^{-1/s} \leq \left[\frac{p}{s \gamma_{1/K}(q, p, p/s)} \right]^{-1/p} \left(\int_0^{|J|} (f_*)^p dx \right)^{-1/p}.$$

By (2.10) it follows that

$$\left(\int_J f^s dx \right)^{-1/s} \leq \left[\frac{p}{s \gamma_{1/K}(q, p, p/s)} \right]^{-1/p} \left(\int_J f^p dx \right)^{-1/p}.$$

Now, multiplying by $\left(\int_J f^q dx \right)^{1/q}$ and passing to the supremum over all $J \subset E$ on both sides, we obtain (3.3). $\square$

Remark 1. We observe that the case $p < q < 0$ is analogous to the case $0 < p < q$.

Now we show that estimates (3.2) and (3.3) are sharp in the following sense. Let x_0 be the unique solution of the equation (3.1). If $0 < p < q$ then there exists a function $f \in B_p^q(K)$ which belongs to $B_p^s(K)$ for any $s \in [q, x_0]$ but $f \notin B_p^{x_0}(K)$, namely

$$x_0 = \sup\{s : f \in B_p^s(K), \forall f \in B_p^q(K)\}.$$

Analogously if $p < 0 < q$, then there exists a function $f \in B_p^q(K)$ which belongs to $B_s^q(K)$ for any $s \in (x_0, p]$, not belonging to $B_{x_0}^q(K)$; this means that

$$x_0 = \inf\{s : f \in B_s^q(K), \forall f \in B_p^q(K)\}.$$

In order to prove our optimal integrability results we need the following Lemma.

Lemma 3.2 ((Korenovskii, 1992)). *Let $f \in L_\varphi([a, b])$ be a monotonic function, where $\varphi \in \Phi$ and let $I \subset [a, b]$ such that*

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Then

$$\int_I \varphi(f(x)) dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) dx.$$

Theorem 3.3. *Let x_0 be the unique solution of the equation (3.1). Then the function*

$$f(x) = x^{-\frac{1}{x_0}}, \quad x \in (0, 1)$$

satisfies $B_p^q(f) < \infty$, but $B_p^{x_0}(f) = \infty$ if $0 < p < q$ and $B_{x_0}^q(f) = \infty$ if $p < 0 < q$.

Proof. We begin to prove the assertion in the case $0 < p < q$. Let us consider the function $f(x) = x^\alpha$, for $x \in (0, 1)$ and $-\frac{1}{q} < \alpha < 0$. For the interval $I \subset (0, 1)$ let us find $t > 0$ such that $I \subset (0, t)$ and

$$\int_I x^{\alpha p} dx = \int_0^t x^{\alpha p} dx.$$

Then, by Lemma 3.2, for $\varphi(s) = s^{\frac{q}{p}}$ we have

$$\int_I x^{\alpha q} dx \leq \int_0^t x^{\alpha q} dx,$$

hence the B_p^q -norm of $f(x) = x^\alpha$ satisfies the following inequality

$$\begin{aligned} B_p^q(f) &= \sup_{I \subset (0,1)} \frac{\left(\int_I x^{\alpha q} dx\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_I x^{\alpha p} dx\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \sup_{0 < t < \infty} \frac{\left(\int_0^t x^{\alpha q} dx\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^t x^{\alpha p} dx\right)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}}{(\alpha q + 1)^{\frac{1}{q}}} := K_{p,q,\alpha}. \end{aligned}$$

This means that $f(x) = x^\alpha$ belongs to $B_p^q(K)$ class for $-\frac{1}{q} < \alpha < 0$ with the constant in the right hand side $K = K_{p,q,\alpha}$. From Theorem 3.1 $f(x) = x^\alpha$ also belongs to $B_p^s(K)$ class for $q \leq s < x_0$ and, clearly, $\alpha = -\frac{1}{x_0}$ is the upper bound of those values for which the B_p^q -norm is finite, but $f(x) = x^{-\frac{1}{x_0}}$ does not belong to $B_p^{x_0}(K)$.

Now we prove the claim for $p < 0 < q$. We consider again the power function $f(x) = x^\alpha$ for $x \in (0, 1)$ and $0 < \alpha < -\frac{1}{p}$. As in the previous case we have

$$\int_I x^{\alpha q} dx = \int_0^1 x^{\alpha q} dx.$$

Then, applying Lemma 3.2 with $\varphi(s) = s^{\frac{p}{q}}$ we get

$$\int_I x^{\alpha p} dx \leq \int_0^1 x^{\alpha p} dx,$$

that yields

$$\begin{aligned} B_p^q(f) &= \sup_{I \subset (0,1)} \left(\int_I x^{\alpha q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_I x^{\alpha p} dx \right)^{-\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{0 < I < \infty} \left(\int_0^1 x^{\alpha q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{\alpha p} dx \right)^{-\frac{1}{p}} = \frac{(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}}{(\alpha q + 1)^{\frac{1}{q}}} := K_{p,q,\alpha}. \end{aligned}$$

Arguing in the same way we deduce that $f(x) = x^\alpha$ belongs to $B_p^q(k)$ class for $0 < \alpha < -\frac{1}{p}$ and also to $B_s^q(K)$ class for $x_0 < s \leq p$. Evidently $\alpha = -\frac{1}{x_0}$ is the lower bound of those values for which the B_p^q -norm is finite but, choosing $f(x) = x^{-\frac{1}{x_0}}$, we have $B_{x_0}^q(f) = \infty$. $\square$

Remark 2. *The previous theorem implies that the best sommability exponent of all the functions of $B_p^q(K)$ class is equal to the best sommability exponent of a power type function belonging to $B_p^q(K)$ class.*

Finally we observe that the estimates (3.2) and (3.3) in the special cases B_1^q and $B_{\frac{1}{1-p}}^1$ give back the estimates relative to the G_q classes of Gehring (D'Apuzzo-Sbordone (1990)) and to the A_p classes of Muckenhoupt (Korenovskii (1992)), which are sharp.

ACKNOWLEDGEMENT

The first and third Author have been supported by the Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) of the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM).

References

- B. Bojarski, *Remarks on the stability of Reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings*. Ann. Acad. Sci. Fenn., A Math. 10 (1985), 89-94.
- L. D'Apuzzo, C. Sbordone, *Reverse Hölder inequalities: a sharp result*. Rend. Mat. Appl. (7) 10 (1990), no. 2, 357-366.
- F. Farroni, R. Giova, *Change of variables for A_∞ weights by means of quasiconformal mappings: sharp results*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2013), no. 2, 785-796.
- M. Franciosi, G. MoscarIELLO, *Higher integrability results*. Manuscripta Math. 52 (1985), no.1-3, 151-170.
- F.W. Gehring, *The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*. Acta Math. 130 (1973), 265-277.
- G.H. Hardy - J.E. Littlewood - G. Polya, *Some simple inequalities satisfied by convex functions*, Messenger of Math., 58 (1929), pp. 145-152.
- A.A. Korenovskii, *The exact continuation of a Reverse Hölder Inequality and Muckenhoupt's conditions*. Math. Notes, 52 (5-6) (1992), 1192-1201.
- A.A. Korenovskii, *On the reverse Hölder inequality*. Math. Notes 81 (2007), no. 3-4, 318-328.
- A.A. Korenovskii, *Mean Oscillations and Equimeasurable Rearrangements of Functions*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 4, Springer, Berlin; UMI, Bologna, (2007a).
- N.A. Malaksiano, *On exact inclusions of Gehring classes in Muckenhoupt classes*. Math. Notes 70 (5) (2001), 673-681.
- N.A. Malaksiano, *The precise embeddings of one-dimensional Muckenhoupt classes in Gehring classes*. Acta Sci. Math. 68 (1-2) (2002), 237-248.
- B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*. Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.
- A. Popoli, *Optimal integrability in B_p^q classes*. Le Matematiche, 52 (1997), no. 1, 159-170.
- C. Sbordone, *Rearrangement of functions and reverse Jensen inequalities*. Proc. Sympos. Pure Math., 45, part 2, Amer. Math. Soc. (1986), 325-329.
- C. Sbordone, *Sharp embeddings for classes of weights and applications*. Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) 29 (2005), no. 1, 339-354.
- I. Wik, *Reverse Hölder inequalities*, in "Methods of Real Analysis and Partial Differential Equations", Quaderno n.14 Accademia Pontaniana, Napoli (1992), 131-137.

A unified approach to exact embeddings of Muckenhoupt and Gehring classes

Nota di Arturo Popoli¹ e Carlo Sbordone¹

Presentata dal socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 6 giugno 2014)

Abstract - Exact bounds for exponents of “sharp” Gehring or Muckenhoupt classes of weights containing a given Gehring or Muckenhoupt class are derived by mean of a single equation. Previously different inclusions were separately treated. Here the one dimensional case $n = 1$ is specified when A_2 or G_2 are the given classes.

1 - INTRODUCTION

Let f be a weight, that is a non negative measurable function on a cube $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ with sides parallel to the coordinate axes. We define the mean value of f over the measurable set $E \subset Q_0$ by

$$f_E = \int_E f(x) dx = \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx.$$

Definition 1. Let $p > 1$ and $K \geq 1$. The weight f is said of the Muckenhoupt class $A_p = A_p(K)$ if

$$A_p(f) = \sup_{Q \subset Q_0} \int_Q f(x) dx \left(\int_Q f^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq K \quad (1.1)$$

where the supremum is taken over all cubes $Q \subset Q_0$.

Definition 2. For $p = 1$ and $K \geq 1$, the weight f is said of the $A_1 = A_1(K)$ class if

$$A_1(f) = \sup_{Q \subset Q_0} \frac{\int_Q f(x) dx}{\text{ess inf}_Q f}.$$

¹Dipartimento di Matematica e Appl. “R. Caccioppoli”, Via Cintia- Monte S. Angelo, 80126 Napoli, Italy.
arturo.popoli@unina.it, sbordone@unina.it

Such a class was introduced in 1972 by B. Muckenhoupt (Muckenhoupt, 1972) and plays a significant role in Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. A well known result in (Muckenhoupt, 1972) is that if the weight f belongs to $A_p(K)$, then it also belongs to $A_{p-\delta}(K')$ for some $\delta > 0$ and $K' \geq 1$:

$$A_p(K) \subset A_{p-\delta}(K') \quad (1.2)$$

Definition 3. Let $q > 1$ and $H \geq 1$. The weight f is said of the Gehring class $G_q = G_q(H)$ if

$$G_q(f) = \sup_{Q \subset Q_0} \frac{\left(\int_Q f^q \right)^{\frac{1}{q}}}{\int_Q f} \leq H \quad (1.3)$$

Such a class was introduced in 1973 by F.W. Gehring (Gehring, 1973) and plays a significant role in the theory of quasiconformal mappings, PDE's and Calculus of Variations. A celebrated result in (Gehring, 1973) is that if the weight f belongs to $G_q(H)$, then it also belongs to $G_{q+\varepsilon}(H')$ for some $\varepsilon > 0$ and $H' \geq 1$:

$$G_q(H) \subset G_{q+\varepsilon}(H') \quad (1.4)$$

In (Bojarski et al., 1992) ($n = 1$), the embedding of $A_1(K)$ in $G_q(K')$ for $1 < q < \frac{K}{K-1}$ and suitable $K' \geq 1$ is established.

In 1974 Coifman-Fefferman ((Coifman-Fefferman, 1974)) proved that any Gehring class is contained in some Muckenhoupt class, and conversely. Namely, for $q > 1$ and $H \geq 1$ the embedding

$$G_q(H) \subset A_{p_1}(K_1) \quad (1.5)$$

for suitable $p_1 > 1$ and $K_1 \geq 1$ holds and conversely for $p > 1$ and $K \geq 1$, the embeddings

$$A_p(K) \subset G_{q_1}(H_1) \quad (1.6)$$

for suitable $q_1 > 1$ and $H_1 \geq 1$ hold true.

The problem of finding the exact bounds of exponents for embeddings (1.2), (1.4), (1.5), (1.6) was achieved only in the one-dimensional case. Namely for monotone functions D'Apuzzo-Sbordone (D'Apuzzo-Sbordone, 1990) obtained the sharp bound of exponents $q + \varepsilon$ and constants H' which (1.4) is valid. The result was extended to general weights by Korenowski ((Korenovskii, 2007a),(Korenovskii, 1992)), who also obtained the sharp bound of exponents $p - \delta$ and constants K' for which (1.2) is valid (see also (Vasyunin, 2004)).

Let us state precisely these results,

Theorem 1.1. Let $n = 1$. If $G_q(v) = K$ then for any $q_1 < q_0$ there exists K_1 independent of v such that $G_{q_1}(v) \leq K_1$ where the exponent $q_0 > q$ is the root of the equation

$$\frac{q_0 - q}{q_0} \left(\frac{K q_0}{q_0 - 1} \right) = 1.$$

Moreover, the value of q_0 cannot generally be increased.

Theorem 1.2. Let $n = 1$. If $A_p(w) = H$, then for any $p_1 > p_0$ there exists H_1 independent on w such that $A_{p_1}(w) \leq H_1$ where the exponent $p_0 < p$ is the root of the equation

$$\frac{p - p_0}{p - 1} (Hp_0)^{\frac{1}{p-1}} = 1.$$

Moreover, the value of p_0 cannot generally be increased.

More recently ((Malaksiano, 2001), (Malaksiano, 2002)) the sharp bounds of exponents and constants for inclusions (1.5) and (1.6) in one dimensional case were obtained.

Theorem 1.3 ((Malaksiano, 2001)). Let $n = 1$. If $G_q(v) = K$ and $p_0 > 1$ is the root of the equation

$$p_0 \left(\frac{1}{1 + q(p_0 - 1)} \right)^{\frac{1}{q}} = K \quad (1.7)$$

then for every $p > p_0$ there is $H \geq 1$ such that $H = H(q, K, p)$ and

$$v \in A_p(H).$$

The result is sharp.

Theorem 1.4 ((Malaksiano, 2002)). Let $n = 1$. If $A_p(w) = H$ and $q_0 > 1$ is the root of the equation

$$\left(\frac{q_0(p-1)}{1 + q_0(p-1)} \right)^{p-1} \frac{q_0}{q_0 - 1} = H$$

then for every $q \in (1, q_0)$ then there is $K \geq 1$ such that $K = K(p, H, q)$ and

$$w \in G_q(K)$$

The result is sharp.

A more general class of weights, including both the A_p and G_q classes was proposed by Bojarski (Bojarski, 1985).

Definition 4. Let $r, s \in \mathbb{R} - \{0\}$ with $r < s$ and $C \geq 1$. The weight f belongs to the class (of reverse Hölder inequality $B_r^s(C)$), if

$$B_r^s(f) = \sup_{Q \subset Q_0} \frac{\left(\int_Q f^s \right)^{\frac{1}{s}}}{\left(\int_Q f^r \right)^{\frac{1}{r}}} \leq C \quad (1.8)$$

The problem of sharp inclusions between different $B_r^s(C)$ classes in the one dimensional case was considered by Popoli (Popoli, 1998), see also (Popoli, 1995), (Popoli, 2003). Namely in (Popoli, 1998), it was shown that the condition $f \in B_r^s(C)$ implies the summability of the function f^q when

- 1) $s \leq q < s_0$ if $rs > 0$

2) $r_0 < q \leq r$ if $rs < 0$

and the extremal values s_0 in the 1.) case and r_0 in the 2.) case are the roots of the single equation

$$\left(\frac{x}{x-s}\right)^{\frac{1}{s}} = K \left(\frac{x}{x-r}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (1.9)$$

Our aim here is to prove that for $n = 1$ Theorem 1.1 and Theorem 1.2 can be incorporated into one single statement involving the two solutions of the same equation. Same situation holds true for Theorems 1.3 and 1.4. See the book (Korenovskii, 2007) and (Sbordone, 2005) for a complete account of this issue.

2 - THE MAIN RESULT

In this Section we first prove that properties of A_2 weights stated in Theorems 1.2 (see (Korenovskii, 2007)) and 1.4 (see (Malaksiano, 2002)) can be incorporated in a single Theorem with a unified proof. Namely we will prove that a weight in A_2 also belongs to both A_p and G_q classes with sharp constants, where the optimal bounds for the indexes p and q are the two solutions of the equations (1.9).

Theorem 2.1. *Suppose $w \in A_2(K)$, $K \geq 1$. Then*

1. *for $1 < q < \sqrt{\frac{K}{K-1}}$ there exists $B' \geq 1$ such that $w \in G_q(B')$ ($B' = B'(K, q)$) and*

$$G_q(w) \leq K^{\frac{1-q}{2}} \frac{\left(1 - \frac{2\sqrt{K-1}}{\sqrt{K} + \sqrt{K-1}}\right)^{\frac{q+1}{2}}}{1 - (q+1) \frac{\sqrt{K-1}}{\sqrt{K} + \sqrt{K-1}}} \quad (2.1)$$

2. *for $1 + \sqrt{\frac{K-1}{K}} < p \leq 2$ there exists $A' \geq 1$ such that $w \in A_p(KA')$, $A' = A'(K, p)$*

$$A_p(w) \leq \frac{K(p-1)}{1 - Ap(2-p)} \quad (2.2)$$

Let us start with the following Theorem by (Korenovskii, 2007) (Theorem C.8) which is based on properties of the roots of the equation

$$\left(\frac{x}{x-s}\right)^{\frac{1}{s}} = K \left(\frac{x}{x-r}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.3)$$

introduced by Popoli (Popoli, 1998) in his unifying theory of B_r^s -class of reverse Hölder inequalities. Namely in (Popoli, 1998) Popoli proves that condition $f \in B_r^s(K)$, that is

$$\sup_{Q \subset Q_0} \frac{\left(\int_Q f^s\right)^{\frac{1}{s}}}{\left(\int_Q f^r\right)^{\frac{1}{r}}} = K \quad Q_0 \text{ fixed } r < s, rs \neq 0 \quad (2.4)$$

implies $f \in L_{loc}^q(Q_0)$

1. $s \leq q < s_0$ if $rs > 0$
2. $r_0 < q \leq r$ if $rs < 0$

and the extremal values s_0 in the 1.-case and r_0 in the 2.-case are roots of the equation (2.3).

Theorem 2.2 ((Korenovskii, 2007)). *Let $r, s \in \mathbb{R} - \{0\}$ with $r < s$ and assume that the non negative weight f satisfies $B_r^s(f) = K$, that is (2.4). Let $r_0 < s$ be the two solutions to the equation (2.3):*

$$r_0 < \min\{0, r\}; \quad \max\{0, s\} < s_0$$

Then for any $q \in (r_0, s_0) \setminus \{0\}$. There exist constants $A = A(q), B = B(q) \in \mathbb{R}$ such that

$$\frac{1}{A} \left(\int_Q f^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_Q f^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq B \left(\int_Q f^s \right)^{\frac{1}{s}} \quad (2.5)$$

for any cube $Q \subset Q_0$. Here Q_0 is a given interval $Q_0 \subset \mathbb{R}$.

For the proof see pag. 173 in (Korenovskii, 2007). Another useful result is the following Theorem by (Vasyunin, 2004), (Martio-Sbordone, 2007).

Theorem 2.3. *Suppose that a weight f belongs to the A_p class, $p > 1$. Then f belongs to the G_q -class for each $q \in [1, p_2(p, A_p(w))]$. Moreover*

$$G_q(f) \leq A_p(f)^{\frac{1-\gamma}{p}} \frac{(1 - x(p, A_p(f)))^\gamma}{1 - \gamma x(p, A_p(f))} \quad (2.6)$$

where $\gamma = \frac{pq-q+1}{p}$. The bound $p_2(p, A_p(f))$ for q is optimal for $A_p(f) > 1$.

Proof of Theorem 2.1. We have $A_2(K) = B_{-1}^1(K)$ so $r = -1 < s = 1$. Let $r_0 < s_0$ be the two solutions to equation (2.3), which reduces to the quadratic equation

$$\frac{x}{x-1} = K \frac{x}{x+1}$$

whose solutions are $x_i = \pm \sqrt{\frac{K}{K-1}}$, $i = 1, 2$. Then, by Theorem 2.2 for any

$$q \in \left(-\sqrt{\frac{K}{K-1}}, \sqrt{\frac{K}{K-1}} \right) = (r_0, s_0) \quad (2.7)$$

there exist A, B such that

$$\frac{1}{A} \left(\int_Q f^{-1} \right)^{-1} \leq \left(\int_Q f^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq B \left(\int_Q f \right) \quad (2.8)$$

for any cube $Q \subset Q_0$. Hence for

$$1 < q < s_0 = \sqrt{\frac{K}{K-1}} \quad (2.9)$$

$f \in G_q(B)$. On the other hand the first inequality in (2.7) with $q = -\frac{1}{p-1}$ reads as

$$\left(\int_Q f^{-1}\right)^{-1} \left(\int_Q f^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq A \quad (2.10)$$

recall that by assumption $f \in A_2(K)$ that is

$$\left(\int_Q f\right) \int_Q f^{-1} \leq K \quad (2.11)$$

for any cube $Q \subset Q_0$ hence by (2.10) we arrive at

$$\left(\int_Q f\right) \left(\int_Q f^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq K A \quad (2.12)$$

for $1 + \sqrt{\frac{K-1}{K}} = 1 - \frac{1}{r_0} < p \leq 2$ which is equivalent to $r_0 < q \leq -1$. In conclusion we have for $1 + \sqrt{\frac{K-1}{K}} = 1 - \frac{1}{r_0} < p \leq 2$, $f \in A_p(KA)$. $\square$

Similarly one can prove the following

Theorem 2.4. *Suppose $v \in G_2(H)$, $H \geq 1$ then*

- *for $p > H(H + \sqrt{H^2 - 1})$ there exists $A' \geq 1$ such that $v \in A_p(A')$, $A' = A'(H, p)$.*
- *for $2 \leq q < 1 + \frac{H}{\sqrt{H^2 - 1}}$ there exists B' such that $v \in G_q(HB')$, $B' = B'(H, q)$.*

ACKNOWLEDGEMENT

The authors have been supported by the Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro applicazioni (GNAMPA) of the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM).

References

- B. Bojarski, *Remarks on the stability of reverse Holder inequalities and quasi-conformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn., A, Math. 10, p. 291–296 (1985).
- B. Bojarski C. Sbordone, I.Wik, *The Muckenhoupt class $A_1(\mathbb{R})$* , Studia Math., 101 (2), 155–163, (1992).
- R. R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math, 51, 241–607, (1974).
- L. D'Apuzzo - C. Sbordone, *Reverse Hölder Inequalities. A sharp result*, 10 Rend. di Matematica, VII, 10, 357–366, (1990).

- F. W. Gehring, *The L^p – integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math., 130, 265–277, (1973).
- A. A. Korenovskii, *Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer. Vol 4. (2007).
- A. A. Korenovskii, *On the reverse Hölder inequality*, Mathematical Notes, 81(3), 318–328, (2007).
- A. A. Korenovskii, *The exact continuation of a reverse Hölder inequality and Muckenhoupt conditions*, Math. Notes, 52 (5–6), 1192–1201 (1992).
- N. A. Malaksiano, *Exact inclusions of Gehring classes in Muckenhoupt classes*, Mathematical Notes, 70(5), 673– 681, (2001).
- N. A. Malaksiano, *The precise embeddings of one-dimensional Muckenhoupt classes in Gehring classes*, Acta Scientiarum Mathematicarum, 68(1–2), 237–248, (2002).
- O. Martio - C. Sbordone, *Quasiminimizers in one dimension: integrability of the derivative, inverse function and obstacle problems*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 186(4), 579–590 (2007).
- B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function* , Trans. Amer. Math. Soc., 165, 207–226, (1972).
- A. Popoli, *Optimal integrability in B_p^q classes*, Le Matematiche, 52(1), p. 159–170, (1998).
- A. Popoli, *Weighted reverse Hölder inequalities*, Rendiconto della Accademia delle scienze fisiche e matematiche, 62, 187–211, (1995).
- A. Popoli, *On an integral inequality and related summability results*, Anal. Math., 29 (2), 135–145, (2003).
- C. Sbordone, *Sharp embeddings for classes of weights and applications*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) 29, 339–354, (2005).
- V. Vasyunin, *The sharp constant in the reverse Hölder inequality for the Muckenhoupt weights*, St. Petersburg Math. J., 15, 49–79, (2004).
- I. Wik, *On Muckenhoupt's classes of weight functions*, Studia Math., 94, p. 245–255 (1989).

On a fractal structure of the universal Steenrod algebra

Nota di Adriana Ciampella¹

Presentata dal socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 6 giugno, 2014)

Key words: cohomology operations, Steenrod algebra.

Abstract - We show that the universal Steenrod algebra Q has a system of nested subalgebras $\{Q_s\}_{s \in \mathbb{N}}$, each isomorphic to Q . This family of subalgebras reveals a fractal structure in Q .

Riassunto - Si prova che l'algebra di Steenrod universale Q possiede una catena decrescente di sottoalgebre $\{Q_s\}_{s \in \mathbb{N}}$, tutte isomorfe a Q . Questa famiglia di sottoalgebre conferisce a Q una struttura frattale.

1 - INTRODUCTION

We will work on the prime field $\mathbb{F}_2$ with 2 elements. The universal Steenrod algebra Q , extensively studied by the author and other people (see, for instance, [Ciampella, Lomonaco 2004], [Brunetti, Ciampella, Lomonaco 2005], [Brunetti, Lomonaco 2005], [Brunetti, Ciampella, Lomonaco 2006], [Brunetti, Ciampella 2007], [Brunetti, Ciampella, Lomonaco 2010]), arises in many contexts of algebraic topology because of its relation with various algebras of cohomology operations (Steenrod algebra, Lambda algebra, restricted Lie Algebras). It first appeared in [May 1970], and it is isomorphic to the algebra of cohomology operations in the category of H_∞ -ring spectra. An invariant-theoretic description of Q can be found in [Lomonaco 1990] and [Ciampella, Lomonaco 2004]. It has generators x_k , $k \in \mathbb{Z}$, and relations $R(k, n) = 0$ given by

$$R(k, n) = x_{2k-1-n}x_k + \sum_j \binom{n-1-j}{j} x_{2k-1-j}x_{k-n+j}, \quad (1)$$

for $k \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{N}_0$. These relations are known as *generalized Adem relations*. A typical monomial of Q is of the form $x_I = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_m}$, where the string $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$

¹Department of Mathematics and Applications, University of Naples Federico II

is called the *label* of the monomial x_I . It is said to be *admissible* (or an admissible) if $i_j \geq 2i_{j+1}$ for any $j = 1, \dots, m-1$. The set $\mathcal{B}$ of all admissible monomials form a linear basis for Q (see [Lomonaco 1991]). The relation $R(k, n) = 0$ can also be read as

$$x_{2k-1-n}x_k = \sum_j \binom{n-1-j}{j} x_{2k-1-j}x_{k-n+j}, \quad (2)$$

where the couple on the left hand side is non-admissible, while those on the right hand side are all admissible. So the RHS of (2) is the admissible expression of the couple $x_{2k-1-n}x_k$. Each monomial can be expressed as a sum of admissibles by applying a finite number of relations of Q . The following Theorem is our main result.

Theorem. *There is a chain of nested subalgebras*

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_s \supset Q_{s+1} \supset \dots,$$

each isomomorphic to Q as non-graded algebras.

The existence of such a system of subalgebras reveals that Q has got a *fractal* structure. To prove this result we introduce a linear map $\lambda : Q \rightarrow Q$ which turns out to be an algebra monomorphism. We set $Q_1 = \lambda(Q)$ and $Q_s = \lambda^s(Q)$, where $\lambda^s = \underbrace{\lambda \circ \dots \circ \lambda}_s$. The restriction of λ to Q_s sets an isomorphism between Q_s and Q_{s+1} for any s .

2 - RELATIONS AND SUBALGEBRAS OF Q

Lemma 1. *Let p be a prime, $a = \sum_{i=0}^m a_i p^i$, $b = \sum_{i=0}^m b_i p^i$, ($0 \leq a_i, b_i < p$). Then*

$$\binom{b}{a} \equiv \prod_{i=0}^m \binom{b_i}{a_i} \mod p.$$

Proof. See [Steenrod, Epstein 1962], I 2.6. □

Corollary 1. $\binom{2a-1}{2b} \equiv \binom{a-1}{b} \mod 2$.

Proof. According to the previous result, the following chain of congruences mod 2 holds:

$$\binom{2a-1}{2b} = \binom{2a-2+1}{2b} \equiv \binom{2a-2}{2b} \binom{1}{0} \equiv \binom{a-1}{b}.$$

□

Lemma 2. *Let $s, n \in \mathbb{N}$. Then $\binom{2^s n - 1}{l} \equiv 0 \mod 2$ if $l \not\equiv 0 \mod 2^s$.*

Proof. We proceed by induction on s . Let $s = 1$: $l \not\equiv 0 \pmod 2$ means that l is odd and, in this case, $\binom{2n-1-l}{l} \equiv 0 \pmod 2$ by Lemma 1. Suppose that the result holds for $s-1$ and prove that it holds for s . If $l \not\equiv 0 \pmod{2^s}$ than $l = 2^s h - i$ for $h \in \mathbb{N}_0$ and $1 \leq i \leq 2^s - 1$. But $\binom{2^s n - 1 - l}{l} = \binom{2^s n - 1 - 2^s h + i}{2^s h - i} \equiv 0$ if i is odd, by Lemma 1. So we assume that i is even, $i = 2r$. Then $1 \leq r \leq 2^{s-1} - 1$ and

$$\begin{aligned} \binom{2^s n - 1 - l}{l} &= \binom{2^s n - 1 - 2^s h + i}{2^s h - i} = \binom{2^s n - 1 - 2^s h + 2r}{2^s h - 2r} \\ &= \binom{2(2^{s-1}(n-h) + r) - 1}{2(2^{s-1}h - r)}. \end{aligned}$$

By Corollary 1,

$$\binom{2(2^{s-1}(n-h) + r) - 1}{2(2^{s-1}h - r)} \equiv \binom{2^{s-1}(n-h) + r - 1}{2^{s-1}h - r},$$

and $\binom{2^{s-1}n-1-(2^{s-1}h-r)}{2^{s-1}h-r} = 0$ by the inductive hypothesis. The result follows. $\square$

Proposition 1.

$$\begin{aligned} R(2^s h + 1, 2^s n) &= x_{2^s(2h-n)+1} x_{2^s h+1} \\ &\quad + \sum_j \binom{n-1-j}{j} x_{2^s(2h-j)+1} x_{2^s(h-n+j)+1}. \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} R(2^s h + 1, 2^s n) &= x_{2(2^s h+1)-1-2^s n} x_{2^s h+1} \\ &\quad + \sum_l \binom{2^s n - 1 - l}{l} x_{2(2^s h+1)-1-l} x_{(2^s h+1)-2^s n+l}. \end{aligned}$$

According to Lemma 2, the only possible non-zero coefficients in $R(2^s h + 1, 2^s n)$ are those such that $l \equiv 0 \pmod{2^s}$. So, if we set $l = 2^s j$, we can write $R(2^s h + 1, 2^s n)$ in the following way:

$$\begin{aligned} R(2^s h + 1, 2^s n) &= x_{2(2^s h+1)-1-2^s n} x_{2^s h+1} \\ &\quad + \sum_j \binom{2^s n - 1 - 2^s j}{2^s j} x_{2(2^s h+1)-1-2^s j} x_{(2^s h+1)-2^s n+2^s j}. \end{aligned}$$

By Corollary 1, $\binom{2^s n - 1 - 2^s j}{2^s j} \equiv \binom{n-1-j}{j} \pmod 2$. The result follows. $\square$

Remark. As a consequence of Proposition 1, we get that in Q the relations of type $R(2^s h + 1, 2^s n)$, for any $h \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{N}_0$, involve only generators of type $x_{2^s m+1}$, $m \in \mathbb{Z}$. So the admissible expression of any non-admissible couple (then of any non-admissible monomial) with label $(2^s h_1 + 1, 2^s h_2 + 1, \dots, 2^s h_m + 1)$ involves only generators of type $x_{2^s m+1}$.

Definition 1. Let $s \in \mathbb{N}_0$. Let Q_s be the $\mathbb{F}_2$ -algebra generated by the set $1 \cup \{x_{2^s h+1} \mid h \in \mathbb{Z}\}$ and subject to relations $R(2^s h + 1, 2^s n) = 0$ for $n \in \mathbb{N}_0$.

Then $Q_0 = Q$ and Q_1 is equal to the algebra whose generators have odd index. A monomial $x_I = x_{2^s h_1+1} x_{2^s h_2+1} \cdots x_{2^s h_m+1}$ in Q_s is admissible if $h_i > 2h_{i+1}$ for any $i = 1, \dots, m-1$.

Proposition 2. The admissible monomials x_I with label $I = (2^s h_1 + 1, 2^s h_2 + 1, \dots, 2^s h_m + 1)$ form a basis $\mathcal{B}_s$ of Q_s as $\mathbb{F}_2$ -vector space.

Proof. Any non-admissible monomial of Q_s can be expressed in Q as a sum of admissible monomial by applying a finite number of relations of type $R(2^s h + 1, 2^s n) = 0$. As stated in our Remark, these relations do not contain generators other than those of Q_s . $\square$

Thus we have the vector subspaces inclusions

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_s \supset Q_{s+1} \supset \cdots$$

We are going to show that these are sub-algebra inclusions.

Definition 2. Let $\lambda : Q \rightarrow Q$ be the $\mathbb{F}_2$ -linear map given by

$$\lambda(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}) = x_{2i_1-1} x_{2i_2-1} \cdots x_{2i_m-1}$$

We denote by $2I - 1$ the label $(2i_1 - 1, 2i_2 - 1, \dots, 2i_m - 1)$ of $\lambda(x_I)$. If we let $\lambda^0 = 1_Q$ and $\lambda^s = \lambda \circ \lambda^{s-1}$ for $s > 1$, then it is easy to check that

$$\lambda^s(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}) = x_{2^s(i_1-1)+1} x_{2^s(i_2-1)+1} \cdots x_{2^s(i_m-1)+1}.$$

It is also easy to prove that a monomial $x_I = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$ is admissible if and only if $\lambda(x_I)$ is admissible. Further, as a consequence of Proposition 1, we get

$$\lambda^s(R(k, n)) = R(2^s(k-1) + 1, 2^s n).$$

Theorem 2. λ is an algebra monomorphism.

Proof. The map λ is well defined since any relation $R(k, n)$ of Q is mapped into another relation $R(2k-1, 2n)$. It is injective by Definition 2. To show that λ is an algebra homomorphism, one has to prove that, given two admissible monomials $x_I = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ and $x_J = x_{j_1} \cdots x_{j_q}$, $x_T = x_{i_1} \cdots x_{i_m+q}$ is a summand of $x_I x_J$ in Q if and only if $\lambda(x_T)$ is a summand of $\lambda(x_I) \lambda(x_J) = \lambda(x_I x_J)$. The product $x_I x_J = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_q}$ is admissible if $i_m \geq 2j_1$, and iff $\lambda(x_I) \lambda(x_J) = x_{2i_1-1} \cdots x_{2i_m-1} x_{2j_1-1} \cdots x_{2j_q-1}$ is admissible. If $x_I x_J$ is

non-admissible, that is $i_m < 2j_1$, $i_m = 2j_1 - 1 - n$ for some $n \in \mathbb{N}_0$, then we apply $R(j_1, n)$ to the couple $x_{i_m}x_{j_1}$, but this is equivalent to apply $R(2j_m - 1, 2n) = \lambda(R(j_1, n))$ to the non admissible couple $x_{2i_m-1}x_{2j_1-1}$ which appears in $\lambda(x_I)\lambda(x_J)$. The same situation occurs for all the other relations $R(k, n)$ we apply to make x_Ix_J admissible: they are in one to one correspondence with those $R(2k - 1, 2n)$ needed to make $\lambda(x_I)\lambda(x_J)$ admissible. Then x_T is a summand in the admissible expression of x_Ix_J iff $x_{2T-1} = \lambda(x_T)$ is a summand in the admissible expression of $x_{2I-1}x_{2J-1} = \lambda(x_Ix_J)$. $\square$

Theorem 3. Q_s is a subalgebra of Q .

Proof. As shown in the proof of Theorem 2, if $x_I = x_{2I'-1}$ and $x_J = x_{2J'-1}$ belong to the basis $\mathcal{B}_1$ of Q_1 , then the product $x_Ix_J = x_{2I'-1}x_{2J'-1}$ belongs to Q_1 . The other cases $s > 1$ follow from Theorem 2, as Q_s is just the image of Q under the algebra monomorphism λ^s . $\square$

It turns out that $\lambda(Q_s) = Q_{s+1}$ and thus the restriction of λ to Q_s yields an isomorphism λ_s between Q_s and Q_{s+1} . This proves our main Theorem.

References

- Brunetti, M., Ciampella A., Lomonaco L. A.; 2005, *The Cohomology of the Universal Steenrod algebra*, Manuscripta Math., **118**, 271–282.
- Brunetti M., Lomonaco L. A.; 2005, *An embedding for the E2-term of the Adams spectral sequence*, Ricerche Mat. (1) **54** 185–200.
- Brunetti M., Ciampella A., Lomonaco L.A.; 2006, *An Embedding for the E2-term of the Adams Spectral Sequence at Odd Primes*, Acta Mathematica Sinica, English Series (6) **22**, 1657–1666.
- Brunetti M., Ciampella A.; 2007, *A Priddy-type Koszulness criterion for non-locally finite algebras*, Colloquium Mathematicum (2) **109**, 179–192.
- Brunetti M., Ciampella A., Lomonaco L. A.; 2010, *Homology and cohomology operations in terms of differential operators*, Bull. London Math. Soc. **42**, 53–63.
- Ciampella A., Lomonaco L. A.; 2004, *Homological computations in the universal Steenrod algebra*, Fund. Math. (3) **183**, 245–252.
- Ciampella A., Lomonaco L. A.; 2004a, *The universal Steenrod algebra at odd primes*, Comm. Algebra (7) **32**, 2589–2607.
- Lomonaco, L.A.; 1990, *Dickson invariants and the universal Steenrod algebra*, Suppl. Rend. Cir. Mat. Palermo, (2) **24**, 429–444.
- Lomonaco, L. A.; 1991, *A basis of admissible monomials for the universal Steenrod algebra*, Ricerche Mat. (1) **40**, 137–147.
- May J. P.; 1970, *A General Approach to Steenrod Operations*, Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer, **168**, 153–231.
- Steenrod, N.E. and Epstein, D.B.A.; 1962, *Cohomology operations*, Ann. of Math. Stud. no. **50**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

On natural derivatives and the curvature formula in fiber bundles

Nota del socio Giovanni Romano¹

(Presentata nell'Adunanza del 6 giugno, 2014)

Key words: Fiber bundles, natural derivatives, connections, integrability, covariant derivatives.

Abstract - Natural derivatives of a section of a fiber bundle are defined as tangent vector fields on the image of the section. A local extension to vector fields in the tangent bundle leads to a direct proof of the formula expressing the curvature of a connection in terms of vertical derivatives. The result is based on the tensoriality property of the horizontal lifting and extends to nonlinear connections on fiber bundles a well-known formula for linear connections on vector bundles.

Riassunto - Le derivate naturali di una sezione di una varietà fibrata sono definite come campi vettoriali tangenti all'immagine della sezione. Un'estensione locale a campi vettoriali nel fibrato tangente consente una dimostrazione diretta della formula che esprime la curvatura di una connessione in termini di derivate verticali. Il risultato è basato sul ricorso alla proprietà di tensorialità del sollevamento orizzontale ed estende a connessioni non lineari su varietà fbrate una nota formula relativa a connessioni lineari su fibrati vettoriali.

1. Introduction

The notion of connection on a fiber bundle was introduced in (Ehresmann, 1950) and further investigated in (Libermann, 1969, 1973, 1982). Standard references on this topic are the article (Kobayashi, 1957) and the text (Kobayashi and Nomizu, 1963).

¹Department of Structures, University of Naples Federico II, via Claudio 21, 80125 - Naples, Italy. e-mail: romano@unina.it

The analysis developed in this paper makes also reference to the treatment of the matter presented in (Kolar et al., 1993). Let us recall some well-known facts. In the tangent bundle to a fiber bundle the vertical distribution is naturally defined by considering, at each point of the manifold, the vectors tangent to the fiber through that point. The vertical distribution is always integrable and the leaves of the induced foliation are the fibers themselves.

The general definition of a connection as a (regular) field of projections on the vertical subspaces of the tangent spaces to a fiber bundle, splits each tangent space into two complementary subspaces, the vertical and the horizontal ones. This leads naturally to the question about integrability of the horizontal distribution.

The involutivity condition provided by FROBENIUS theorem leads to the definition of the curvature as obstruction against integrability of the horizontal distribution (Kolar et al., 1993). In this context a new result, stated in Theorem 4.1 below, builds a direct bridge between the expression of the curvature in terms of horizontal lifts, which is the one naturally steaming out of FROBENIUS involutivity condition, and the expression of the curvature in terms of covariant derivatives, more suitable for applications.

The expression, which is well-known for linear connections on vector or principal bundles, is extended by the new result to general connections on fiber bundles. The proof is based on the novel definition of natural derivative vector fields, on an extension to a vector field in the tangent bundle and on a direct, powerful tensoriality argument.

The analysis moves along the same line of thought as for instance the one declared in (Mangiarotti and Modugno, 1984), by trying to avoid unnecessary recourse to additional geometric structures.

In this respect the assumptions and the result of our Theorem 4.1 should be compared with the ones in (Kobayashi and Nomizu, 1963) Chapter III Theorem 5.1, in (Choquet-Bruhat et al., 1989) Chapter V-bis Section A.5, in (Mangiarotti and Sardanashvily, 2000) Chapter 2 Section 2.4, and in (Michor, 2007) Corollary 19.16, dealing with the curvature of linear connections on vector bundles.

2. Connection on a fiber bundle

Let us recall some definitions and notations (Saunders, 1989), (Lang, 1995), (Romano, G., 2007). A circle $\circ$ denotes a chain composition and a dot $\cdot$ (sometimes omitted) denotes a fiberwise $\mathbb{R}$ -linear chain composition.

Let two differentiable manifolds $\mathbf{M}, \mathbf{N}$, and the relevant tangent bundles with projections $\tau_{\mathbf{M}} \in C^1(TM; \mathbf{M})$, $\tau_{\mathbf{N}} \in C^1(TN; \mathbf{N})$ be related by a morphism $\phi \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{N})$, as depicted by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} T\mathbf{M} & \xrightarrow{T\phi} & T\mathbf{N} \\ \tau_{\mathbf{M}} \downarrow & & \downarrow \tau_{\mathbf{N}} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{N} \end{array} \iff \tau_{\mathbf{N}} \circ T\phi = \phi \circ \tau_{\mathbf{M}}, \quad (1)$$

where T is the tangent functor.

A vector field $\mathbf{X} \in C^1(\varphi(\mathbf{M}); T\mathbf{N})$ is φ -related to a vector field $\mathbf{v} \in C^1(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ if

$$\mathbf{X} \circ \varphi = T\varphi \cdot \mathbf{v}. \quad (2)$$

For a diffeomorphism $\varphi \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{N})$ the push and pull operations are then defined by $\mathbf{X} = \varphi \uparrow \mathbf{v}$ and $\mathbf{v} = \varphi \downarrow \mathbf{X}$. The usual notation is $\varphi \uparrow = \varphi_*$ and $\varphi \downarrow = \varphi^*$ but then too many stars do appear in the geometrical sky (push, duality, HODGE star).

A fiber bundle is a surjective submersion $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ with $\mathbf{E}$ the total manifold and $\mathbf{M}$ the base manifold, i.e. $\text{im}(\mathbf{p}) = \mathbf{M}$ and $\text{im}(T\mathbf{p}(\mathbf{e})) = T_{\mathbf{p}(\mathbf{e})}\mathbf{M}$ for all $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$. The vertical distribution is the subbundle $V\mathbf{E} := \ker(T\mathbf{p})$ of the tangent bundle $T\mathbf{E}$.

A section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ is a morphism such that $\mathbf{p} \circ \mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{M})$ is the identity. The fiber at $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ is the set $\mathbf{E}_{\mathbf{x}} := \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{x})$ which is assumed to be isomorphic to a standard fiber manifold. The pull-back bundle of the tangent bundle $\tau_{\mathbf{E}} \in C^1(T\mathbf{E}; \mathbf{E})$ by a section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ is the fiber bundle $\mathbf{s} \downarrow \tau_{\mathbf{E}} \in C^1(\mathbf{s} \downarrow T\mathbf{E}; \mathbf{M})$ whose fiber at $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ is the tangent space $T_{\mathbf{s}(\mathbf{x})}\mathbf{E}$ of $\tau_{\mathbf{E}} \in C^1(T\mathbf{E}; \mathbf{E})$.

Definition 2.1 (Connection). A connection $P_V \in \Lambda^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$ in a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ is an idempotent vector-valued one-form, which is pointwise a projector on vertical subspaces: $P_V \circ P_V = P_V$ with $\text{im}(P_V(\mathbf{e})) = \ker(T\mathbf{p}(\mathbf{e}))$. Horizontal vectors are the ones in the kernel $\ker(P_V(\mathbf{e}))$ of the connection. The projector on the horizontal distribution $H\mathbf{E}$ is denoted by $P_H = \text{id}_{T\mathbf{E}} - P_V$, so that $P_H \circ P_H = P_H$ and $P_H \circ P_V = P_V \circ P_H = 0$.

The tangent to a section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ along a vector field $\mathbf{v} \in C^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ is a section $T\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{s} \downarrow T\mathbf{E})$ of the pull-back bundle $\mathbf{s} \downarrow \mathbf{p} = C^1(\mathbf{s} \downarrow T\mathbf{E}; \mathbf{M})$.

Definition 2.2 (Natural derivative). *In a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$, for any section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$, the natural derivative along a vector field $\mathbf{v} \in C^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ is the vector field $T_{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{s}(\mathbf{M}); T\mathbf{E})$ in the tangent bundle $\tau_{\mathbf{E}} \in C^1(T\mathbf{E}; \mathbf{E})$ defined by*

$$T_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{s} := T\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \in C^1(\mathbf{M}; T\mathbf{E}). \quad (3)$$

For any $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ we have that $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}_{\mathbf{x}}) = T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\mathbf{s} \in T_{\mathbf{s}_{\mathbf{x}}}\mathbf{E}$. The natural derivative $T_{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{s}(\mathbf{M}); T\mathbf{E})$ and the vector field $\mathbf{v} \in C^1(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$, and the relevant flows are $\mathbf{p}$ -related according to the commutative diagrams

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{s}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{E} & \xrightarrow{\text{Fl}_{\lambda}^{T_{\mathbf{v}}}} & \mathbf{E} \\ \mathbf{p} \downarrow & & \downarrow \mathbf{p} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\text{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}}} & T\mathbf{M} \end{array} \iff \mathbf{p} \circ \text{Fl}_{\lambda}^{T_{\mathbf{v}}} = \text{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \circ \mathbf{p}, \quad (4)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{s}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{E} & \xrightarrow{T_{\mathbf{v}}} & T\mathbf{E} \\ \mathbf{p} \downarrow & & \downarrow T\mathbf{p} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\mathbf{v}} & T\mathbf{M} \end{array} \iff T\mathbf{p} \cdot T_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \circ \mathbf{p}, \quad (5)$$

It is apparent that the natural derivative is tensorial in $\mathbf{v} \in C^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ since the differential $T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\mathbf{s} \in T_{\mathbf{s}(\mathbf{x})}\mathbf{E}$ is linearly dependent on the vector $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$. The next statement enunciates a well known property of naturality of the LIE bracket with respect to relatedness, (see e.g. (Kolar et al., 1993) Lemma 3.10 or (Romano, G., 2007) Lemma 1.3.4).

Lemma 2.1 (Morphism-related vector fields and Lie brackets). *Let the vector fields $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C^1(\mathbf{N}; T\mathbf{N})$ be related to vector fields $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ by a morphism $\varphi \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{N})$, viz:*

$$\mathbf{X} \circ \varphi = T\varphi \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{Y} \circ \varphi = T\varphi \cdot \mathbf{v}.$$

Then also their LIE brackets are φ -related:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \circ \varphi = T\varphi \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Setting $T_{\mathbf{v}} \circ \varphi := T\varphi \cdot \mathbf{v}$ for any morphism $\varphi \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{N})$, we have that $T\varphi \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = T_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \circ \varphi$ and the result may be stated as $[T_{\mathbf{u}}, T_{\mathbf{v}}] = T_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}$.

Tensoriality is a crucial property of a multilinear scalar or vector valued map, meaning that it *lives at points* (Spivak, 1979), i.e. that its point-values depend only on the values of the argument fields at that point.

A standard tensoriality criterion for multilinear forms on $\mathbf{M}$ is provided by $C^\infty(\mathbf{M}; \mathfrak{R})$ -linearity (see (Kolar et al., 1993) Lemma 7.3 or (Lang, 1995) Lemma 2.3 of Ch. VIII).

Although not needed in evaluating the LIE bracket $[T_u, T_v]$ on $s(\mathbf{M})$, for the developments illustrated in Theorem 4.1 it is essential to extend the domain of the natural derivatives $T_u, T_v \in C^1(s(\mathbf{M}); T\mathbf{E})$ outside the range $s(\mathbf{M}) \subset \mathbf{E}$ of the section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$, so that they can be considered as (local) tangent vector fields $T_u, T_v \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$ with the further property of being projectable. This task can be accomplished by the following construction.

Lemma 2.2 (Extension by foliation). *The natural derivative of a section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$, according to a vector field $\mathbf{v} \in C^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$, can be extended, in the bundle $\tau_{\mathbf{E}} \in C^1(T\mathbf{E}; \mathbf{E})$, to a (local) tangent vector field $T_v \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$ which projects on the vector field $\mathbf{v} \in C^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$, i.e. we have that, locally in $\mathbf{E}$:*

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{E}} \circ T_v &= \text{id}_{\mathbf{E}}, \\ T\mathbf{p} \cdot T_v &= \mathbf{v} \circ \mathbf{p}. \end{aligned} \tag{6}$$

Proof. The extension may be performed by considering a (local) foliation of the total manifold $\mathbf{E}$, whose leaves are transversal to the fibers and include the folium $s(\mathbf{M})$. The existence of at least a local foliation with these characteristics can be inferred by acting with a local bundle chart, which maps (locally) the image of the section into the trivial bundle image of the chart, and, subsequently, with a local chart which maps (locally) the fibers in their linear model space.

The foliation is performed by translation in the linear image of the fibers and the resulting leaves are mapped back to get the leaves in the total manifold. It is thus possible to define the map $\sigma \in C^1(\mathbf{E}; C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E}))$ which to each $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ associates the (local) section $\sigma_{\mathbf{e}} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ by

$$\sigma_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) := \Sigma_{\mathbf{e}} \cap \mathbf{E}_{\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathbf{E},$$

whose range is the leaf $\Sigma_{\mathbf{e}}$ through $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$.

The extension of T_v is (locally) defined by $T_v(e) := T_{p(e)}\sigma_e \cdot v_{p(e)}$ and gives a vector field since $\tau_E(T_{p(e)}\sigma_e \cdot v_{p(e)}) = e$ for all $e \in E$. Moreover this extension projects on $v \in C^0(M; TM)$ since

$$T_{p(e)}p \cdot T_v(e) = T_{p(e)}p \cdot T_{p(e)}\sigma_e \cdot v_{p(e)} = T_{p(e)}(p \circ \sigma_e) \cdot v_{p(e)} = v_{p(e)}.$$

Being $\sigma_e(p(e)) = e$ the extension $T_v(e) := T_{p(e)}\sigma_e \cdot v_{p(e)}$ may be written as $(T_v \circ \sigma_e)(p(e)) = (T\sigma_e \circ v)(p(e))$ which, by surjectivity of p , means that (locally)

$$T_v \circ \sigma_e = T\sigma_e \cdot v, \quad \forall x \in M.$$

If $e_1, e_2 \in E$ are such that $\Sigma_{e_1} = \Sigma_{e_2}$, then $\sigma_{e_1} = \sigma_{e_2}$. If $e \in s(M)$, the section $\sigma_e \in C^1(M; E)$ is in fact coincident with $s \in C^1(M; E)$. ■

Definition 2.3 (Horizontal lift). *In a bundle $p \in C^1(E; M)$ the horizontal lift $H \in C^1(E \times_M TM; TE)$ is a right inverse of $(\tau_E, Tp) \in C^1(TE; E \times_M TM)$ such that the map $H_{s_x} \in C^1(TM; TE)$, defined by $H_{s_x}(v_x) = H(s_x, v_x)$ for all $v_x \in T_x M$, is a linear homomorphism from the tangent bundle $\tau_M \in C^1(TM; M)$ to the tangent bundle $\tau_E \in C^1(TE; E)$, i.e.:*

$$\begin{aligned} (\tau_E, Tp) \circ H &= \text{id}_{E \times_M TM}, \\ H_{s_x}(\alpha u_x + \beta v_x) &= \alpha H_{s_x}(u_x) + \beta H_{s_x}(v_x) \in T_{s_x} E, \end{aligned} \tag{7}$$

with $s_x \in E_x$ and $u_x, v_x \in T_x M$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.3 (Horizontal lifts and horizontal projectors). *Given a horizontal projector $P_H \in C^1(TE; TE)$, the induced horizontal lift is defined by*

$$H(s_x, v_x) := P_H \cdot T_x s \cdot v_x \in H_{s_x} \mathbb{B}, \quad \forall s_x \in E_x, \quad v_x \in T_x M, \tag{8}$$

where $s \in C^1(M; E)$ is an arbitrary section extension of $s_x \in E_x$. Vice versa, a horizontal lift $H \in C^1(E \times_M TM; TE)$ induces a horizontal projector given by $P_H := H \circ (\tau_E, Tp)$.

Proof. The former formula yields a horizontal lift since:

$$((\tau_E, Tp) \circ H)(s_x, v_x) = (\tau_E, Tp) \cdot P_H \cdot T_x s \cdot v_x = (s_x, v_x),$$

and the latter formula yields a horizontal projector because the homomorphism $P_H := H \circ (\tau_E, Tp)$ is idempotent by $P_H \circ P_H = H \circ (\tau_E, Tp) \circ H \circ (\tau_E, Tp) = H \circ \text{id}_{E \times_M TM} \circ (\tau_E, Tp) = P_H$ and horizontal by the identity $((\tau_E, Tp) \circ P_H)(X) = ((\tau_E, Tp) \circ H \circ (\tau_E, Tp))(X) = (\tau_E(X), Tp(X))$. ■

Definition 2.4 (Vertical derivative). *The vertical derivative is the vertical component of the natural derivative:*

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{s} := P_V \cdot T_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; V\mathbf{E}). \quad (9)$$

Setting $\mathbf{H}\mathbf{s} = P_H \circ T\mathbf{s}$ and $\bar{\nabla}\mathbf{s} = P_V \circ T\mathbf{s}$, it is $T\mathbf{s} = \bar{\nabla}\mathbf{s} + \mathbf{H}\mathbf{s} \in C^1(TM; T\mathbf{E})$ and $T_{\mathbf{v}} = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_{\mathbf{v}} \in C^1(s(\mathbf{M}); T\mathbf{E})$ with $\bar{\nabla}_{\mathbf{v}} = P_V \circ T_{\mathbf{v}}$ and $\mathbf{H}_{\mathbf{v}} = P_H \circ T_{\mathbf{v}}$.

Lemma 2.4 (Projectability). *The horizontal lift $\mathbf{H}_{\mathbf{v}} \in C^1(s(\mathbf{M}); H\mathbf{E})$ is $\mathbf{p}$ -related to the vector field $\mathbf{v} \in C^1(\mathbf{M}; TM)$: $T\mathbf{p} \circ \mathbf{H}_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \circ \mathbf{p} \in C^0(s(\mathbf{M}); TM)$.*

Proof. From the decomposition $T_{\mathbf{v}} = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$ it follows that: $T\mathbf{p} \circ T_{\mathbf{v}} = T\mathbf{p} \cdot \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} + T\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{v}} = T\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{v}}$ being, by definition $T\mathbf{p} \circ \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} = 0$. The $\mathbf{p}$ -relatedness of $\mathbf{H}_{\mathbf{v}}$ to $\mathbf{v}$ is then inferred from that of $T_{\mathbf{v}}$. ■

Naturality of LIE brackets with respect to relatedness and Lemma 2.4 give:

$$\begin{aligned} T\mathbf{p} \cdot [\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] &= [T\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{u}}, T\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] \\ &= [\mathbf{u} \circ \mathbf{p}, \mathbf{v} \circ \mathbf{p}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ \mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; TM). \end{aligned} \quad (10)$$

Lemma 2.5 (Injectivity). *The horizontal lift $\mathbf{H}\mathbf{s} \in C^1(TM; H\mathbf{E})$, along a cross section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$, is a fiber-wise injective homomorphism, i.e. $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s} \in BL(T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}; H_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E})$ is an injective linear map at each $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.*

Proof. We must prove that $\ker(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) = \{0\}$. We first investigate the linear differential $T_{\mathbf{x}}\mathbf{s} \in BL(T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}; T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E})$. By the characteristic property of a section, $\mathbf{p} \circ \mathbf{s} = \text{id}_{\mathbf{M}}$ it is: $T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{p} \cdot T_{\mathbf{x}}\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}} = T_{\mathbf{x}}(\mathbf{p} \circ \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ for all $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$. It follows that $\ker(T_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) = \{0\}$ and $\text{im}(T_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) \cap \ker(T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{p}) = \{0\}$. The injectivity of $T_{\mathbf{x}}\mathbf{s}$ implies that: $\dim \text{im}(T_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) = \dim T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$. Being $T_{\mathbf{x}}\mathbf{s} = \bar{\nabla}_{\mathbf{x}}\mathbf{s} + \mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s}$ with $\text{im}(\bar{\nabla}_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) \subseteq \ker(T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{p})$, we have that $T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}} = T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{p} \cdot T_{\mathbf{x}}\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ for all $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$. It follows that $\ker(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) = \{0\}$ and $\text{im}(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) \cap \ker(T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{p}) = \{0\}$ with $\dim \text{im}(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s}) = \dim T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$. ■

Theorem 2.1 (Homomorphism). *The horizontal lift $\mathbf{H}\mathbf{s} \in C^1(TM; H\mathbf{E})$ along a section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ is a vector bundle homomorphism between the bundle $\tau_{\mathbf{M}} \in C^1(TM; \mathbf{M})$ and the pull-back bundle $\mathbf{s} \downarrow \tau_{\mathbf{E}} \in C^1(\mathbf{s} \downarrow H\mathbf{E}; \mathbf{M})$ which is fiberwise invertible and tensorial in $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$.*

Proof. Let $\dim \mathbf{M} = \dim T_{\mathbf{x}}\mathbf{M} = m$ and $\dim \mathbb{F} = f$ where $\mathbb{F}$ is the typical fiber. Then $\dim \mathbf{E} = \dim T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E} = m + f$. So that $\dim V_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E} = f$ and $\dim H_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E} = m$. By reasons of dimensions the injectivity of $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}\mathbf{s} \in BL(T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}; H_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E})$ implies then its surjectivity. Moreover let $\bar{\mathbf{s}} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ be another section such that $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x})$. Then, for any $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$, being $T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\mathbf{s}, T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{s}} \in T_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E}$, we have that $T_{\mathbf{p}} \cdot (T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\mathbf{s} - T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{s}}) = 0$ and hence that $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\mathbf{s} = P_{\mathbf{H}} \cdot T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\mathbf{s} = P_{\mathbf{H}} \cdot T_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{H}_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{s}} \in BL(T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}; H_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E})$. To a tangent vector $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$ there corresponds a horizontal vector $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}\mathbf{s} \in H_{s(\mathbf{x})}\mathbf{E}$ which depends only on the value of $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ at $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. ■

3. Curvature of a connection

The vertical distribution of a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ is integrable and the leaves of the induced foliation are the fibers of the bundle. By FROBENIUS theorem, see e.g. (Kolar et al., 1993), (Lang, 1995), integrability of vertical distribution is inferred from the vanishing of the vector-valued lifted *cocurvature* form

$$\mathbf{R}^c(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := -P_{\mathbf{H}} \cdot [\widehat{P_{\mathbf{V}}\mathbf{X}}, \widehat{P_{\mathbf{V}}\mathbf{Y}}] = 0, \quad (11)$$

for any $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T\mathbf{E}$. Here

$$(\widehat{P_{\mathbf{V}}\mathbf{X}}, \widehat{P_{\mathbf{V}}\mathbf{Y}}) \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E}), \quad (12)$$

is any pair of vector fields extension of the vectors $P_{\mathbf{V}}\mathbf{X}, P_{\mathbf{V}}\mathbf{Y} \in T\mathbf{E}$, since tensoriality follows from the $C^\infty(\mathbf{E}; \mathfrak{R})$ -linearity of the cocurvature form. The involutivity condition $[\widehat{P_{\mathbf{H}}\mathbf{X}}, \widehat{P_{\mathbf{H}}\mathbf{Y}}] \in C^1(\mathbf{E}; H\mathbf{E})$, to be imposed for the integrability of the horizontal distribution, is equivalently expressed by the vanishing of the lifted *curvature* form defined by (Kolar et al., 1993)

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := -P_{\mathbf{V}} \cdot [\widehat{P_{\mathbf{H}}\mathbf{X}}, \widehat{P_{\mathbf{H}}\mathbf{Y}}], \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T\mathbf{E}. \quad (13)$$

Tensoriality follows from the $C^\infty(\mathbf{E}; \mathfrak{R})$ -linearity of the curvature form, as shown below. Let us denote by $\Lambda^k(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ the space of tangent-valued k -forms on a manifold $\mathbf{M}$.

Proposition 3.1 (Tensoriality of the curvature). *The curvature of a connection $P_{\mathbf{V}} \in \Lambda^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$ in a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ is a vertical-vector valued, horizontal 2-form $\mathbf{R} \in \Lambda^2(\mathbf{E}; V\mathbf{E})$, that is a 2-form vanishing on vertical vectors and taking values in the vertical distribution.*

Proof. A direct verification of the tensoriality, based on $C^\infty(\mathbf{E}; \mathfrak{R})$ -linearity, yields the result:

$$\begin{aligned} -\mathbf{R}(\mathbf{X}, f\mathbf{Y}) &:= P_V \cdot [\widehat{P_H \mathbf{X}}, \widehat{P_H \mathbf{Y}}] \\ &= f P_V \cdot [\widehat{P_H \mathbf{X}}, \widehat{P_H \mathbf{Y}}] + (\mathcal{L}_{P_H \mathbf{X}} f) (P_V \cdot P_H)(\mathbf{Y}) \\ &= -f \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \forall f \in C^1(\mathbf{E}; \mathfrak{R}), \end{aligned} \quad (14)$$

since $P_V \cdot P_H = 0$. Similarly $\mathbf{R}(f\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = f \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. ■

Theorem 3.1. *For any given section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$, the curvature of a connection $P_V \in \Lambda^1(\mathbf{E}; V\mathbf{E})$ is expressed by a 2-form $\mathbf{R}_s \in \Lambda^2(\mathbf{M}; s\downarrow V\mathbf{E})$ with values in the pull-back of the vertical distribution by the section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$, defined in terms of horizontal lifts by*

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}(s)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \mathbf{R}(\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v) \cdot s \\ &= (\mathbf{H}_{[u, v]} - [\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v]) \cdot s, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Lambda^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M}), \end{aligned} \quad (15)$$

The 2-form $\mathbf{R}(s) \in \Lambda^2(\mathbf{M}; s\downarrow V\mathbf{E})$ is tensorial in $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$.

Proof. We rely on the properties of tensoriality and horizontality of the curvature two-form $\mathbf{R} \in \Lambda^2(\mathbf{E}; V\mathbf{E})$ stated in Proposition 3.1 and on the tensorial isomorphism of the horizontal lifts stated in Theorem 2.1. Accordingly, the point value of the curvature $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -P_V \circ [\widehat{P_H \mathbf{X}}, \widehat{P_H \mathbf{Y}}]$ at $\mathbf{b} \in \mathbf{E}_x$ depends only on the vectors $P_H \mathbf{X}_b, P_H \mathbf{Y}_b \in T_b \mathbf{E}$. Moreover, by Theorem 2.1, given any section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ such that $s_x = \mathbf{b}$, there exists a uniquely determined pair of vectors $\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x \in T_x \mathbf{M}$, such that $\mathbf{H}_{u_x} s = (P_H \mathbf{X})(s_x)$, $\mathbf{H}_{v_x} s = (P_H \mathbf{Y})(s_x)$ and the pair $\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x \in T_x \mathbf{M}$ does not depend on the choice of the section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ such that $s_x = \mathbf{b}$.

Then the curvature two-form $\mathbf{R} \in \Lambda^2(\mathbf{E}; V\mathbf{E})$, evaluated on pairs of horizontal lifts, defines the field $\mathbf{R}(s)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := -P_V \circ [\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v] \circ s \in C^1(\mathbf{M}; V\mathbf{E})$ for any pair of vector fields $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ on the tangent bundle and any section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of the fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$.

By tensoriality, for any section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ the field $\mathbf{R}(s) \in \Lambda^2(\mathbf{M}; V\mathbf{E})$ is a vector-valued two-form on $\mathbf{M}$ with values in $s\downarrow V\mathbf{E}$ and for any pair $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^0(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ the field $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Lambda^1(\mathbf{M}; s\downarrow V\mathbf{E})$ is a vertical-valued vector field along $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$.

Moreover, by Lemma 2.4, the horizontal lifts are projectable and we have the relations

$$\left. \begin{aligned} T\mathbf{p} \circ [\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v] &= [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ \mathbf{p} \\ T\mathbf{p} \circ \mathbf{H}_{[u,v]} &= [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ \mathbf{p} \end{aligned} \right\} \implies T\mathbf{p} \circ ([\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v] - \mathbf{H}_{[u,v]}) = 0.$$

Then $\mathbf{H}_{[u,v]}$ is the horizontal component of $[\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v]$ and we get the equality: $[\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v] - \mathbf{H}_{[u,v]} = \mathbf{P}_V \circ [\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v] \iff \mathbf{H}_{[u,v]} = \mathbf{P}_H \circ [\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v]$. ■

4. Vertical derivative

Lemma 4.1 (Vertical derivative as Lie derivative). *In a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ with a connection, the vertical derivative is given by the generalized LIE derivative*

$$\overline{\nabla}_v \mathbf{s} = \mathcal{L}_{(\mathbf{H}_v, \mathbf{v})} \mathbf{s} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{Fl}_{\lambda}^{(\mathbf{H}_v, \mathbf{v})} \downarrow \mathbf{s} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{Fl}_{-\lambda}^{\mathbf{H}_v} \cdot \mathbf{s} \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}}.$$

Proof. By LEIBNIZ rule $\mathcal{L}_{(\mathbf{H}_v, \mathbf{v})} \mathbf{s} = T\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{H}_v \mathbf{s} = T_v \mathbf{s} - \mathbf{H}_v \mathbf{s}$. Then, being $\mathcal{L}_{(\mathbf{H}_v, \mathbf{v})} \mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; V\mathbf{E})$ and $\mathbf{H}_v \mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; H\mathbf{E})$, by uniqueness of the vertical-horizontal split, we get that $\overline{\nabla}_v \mathbf{s} := \mathbf{P}_V \cdot T_v \mathbf{s} = \mathcal{L}_{(\mathbf{H}_v, \mathbf{v})} \mathbf{s}$. ■

Definition 4.1 (Parallel transport). *Let $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ be a fiber bundle with a connection. The parallel transport $\mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \uparrow \mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of a section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ along the flow $\mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{M})$ is defined by*

$$\mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \uparrow \mathbf{s} := \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{H}_v} \circ \mathbf{s} = (\mathbf{Fl}_{\lambda}^{(\mathbf{H}_v, \mathbf{v})} \uparrow \mathbf{s}) \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}},$$

so that $\mathbf{p} \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \uparrow \mathbf{s} = \mathbf{p} \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{H}_v} \circ \mathbf{s} = \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{s} = \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{s}$.

From the definition of parallel transport and Lemma 4.1 we infer that the vertical derivative and the horizontal lift are given by

$$\overline{\nabla}_v \mathbf{s} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{Fl}_{-\lambda}^{\mathbf{H}_v} \cdot \mathbf{s} \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{Fl}_{-\lambda}^{\mathbf{v}} \uparrow \mathbf{s} \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}},$$

$$\mathbf{H}_v \mathbf{s} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{H}_v} \cdot \mathbf{s} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{v}} \uparrow \mathbf{s}.$$

Since the horizontal lift $\mathbf{H}_v$ is defined pointwise in $\mathbf{M}$, the parallel transport along a curve in $\mathbf{M}$ of a section defined only on that curve is meaningful and so is for the vertical derivative.

Definition 4.2 (Geodesic). A curve $c \in C^1(I; \mathbf{M})$ in a manifold with a connection is a geodesic if the velocity field $\mathbf{v} \in C^1(I; T\mathbf{M})$ of the curve fulfils the condition

$$(\overline{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{v})(\mathbf{x}) := \partial_{\mu=\lambda} c_{\mu,\lambda} \Downarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,$$

where $\overline{\nabla}$ is the vertical derivative, the velocity at $\mathbf{x} = c(\lambda)$ is given by

$$(\mathbf{v} \circ c)(\lambda) := \partial_{\mu=\lambda} c_{\mu}, \quad (16)$$

and $c_{\mu,\lambda} \Downarrow = c_{\lambda,\mu} \Uparrow$ is the parallel transport from c_{μ} to c_{λ} along the curve.

Geodesic curves are related to the notion of *spray*, introduced in (Ambrose et al., 1960), see also (Dicudonne, 1969; Lang, 1995).

Definition 4.3 (Spray). A section $\mathbf{X} \in C^1(TM; TTM)$ of the tangent bundle $\tau_{TM} \in C^1(TTM; TM)$ is called a *spray* if it is also a section of the bundle $T\tau_{TM} \in C^1(TTM; TM)$, that is if $T\tau_{TM} \circ \mathbf{X} = \tau_{TM} \circ \mathbf{X} = \text{id}_{TM}$.

Lemma 4.2 (Geodesics and sprays). Let $\mathbf{S} \in C^1(TM; TTM)$ be a spray and $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$ a tangent vector. Then, for any connection compatible with the spray, i.e. such that $\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{S}(\mathbf{v})$, the base curve, projection of the flow line of the spray through the vector $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$, is a geodesic curve through the base point $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.

Proof. Let $\text{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}})$ be the flow line of the spray passing through the vector $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}$ for $\lambda = 0$. The projected curve on the base manifold is then

$$c : \lambda \mapsto (\tau_{\mathbf{M}} \circ \text{Fl}_{\mu}^{\mathbf{S}})(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}), \quad (17)$$

with $\mathbf{x} = c(0)$ and the velocity field $\mathbf{v} \circ c \in C^1(I; T\mathbf{M})$ given by

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \circ c)(\lambda) &:= \partial_{\mu=\lambda} (\tau_{\mathbf{M}} \circ \text{Fl}_{\mu}^{\mathbf{S}})(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}) \\ &= (T\tau_{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S})(\text{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}})) = \pi_{TM}(\mathbf{S}(\text{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}))) = \text{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

Being $\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{S}(\mathbf{v})$, the formula for the vertical derivative yields

$$(\overline{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{v})(\mathbf{x}) = \partial_{\lambda=0} (\text{Fl}_{-\lambda}^{\mathbf{H}_{\mathbf{v}}} \circ \text{Fl}_{\lambda}^{\mathbf{S}})(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}) = \mathbf{S}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_{\mathbf{x}}) = 0.$$

Hence the base curve is a geodesic. ■

A similar proof shows that the base curve through $\mathbf{v}_x \in T_x \mathbf{M}$ below the differential of the flow line of a spray is the velocity field of a geodesic, in any connection compatible with the spray, and that the velocity field of the base points of the line is a JACOBI field (Michor, 1997).

The next original result is the main contribution of this paper. It provides, in the general context of fiber bundles, the expression of the curvature in terms of vertical derivatives.

Theorem 4.1 (Curvature and vertical derivatives). *For a given section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of a fiber bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ and any pair of vector fields $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$, the following identity holds on $s(\mathbf{M}) \subset \mathbf{E}$:*

$$[\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}] - \bar{\nabla}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} + [\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] - \mathbf{H}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} = [\mathbf{H}_{\mathbf{v}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}] + [\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}, \mathbf{H}_{\mathbf{u}}] = 0. \quad (18)$$

Accordingly, the vertical-valued curvature two-form $\bar{\mathbf{R}}_x(s)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V_{s(x)}\mathbf{E}$ is given by

$$\bar{\mathbf{R}}(s)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}](s) - \bar{\nabla}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(s). \quad (19)$$

Proof. By Lemma 2.1 we know that on $s(\mathbf{M}) \subset \mathbf{E}$ it is $[T_{\mathbf{u}}, T_{\mathbf{v}}] = T_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}$. By performing an extension of the natural derivatives, e.g. by the foliation method envisaged in Lemma 2.2, the vertical derivatives of a section $s \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ are consequently extended to (local) vector fields $\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{E}; V\mathbf{E})$. Then, splitting into vertical and horizontal components

$$T_{\mathbf{u}} = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \quad T_{\mathbf{v}} = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_{\mathbf{v}}, \quad T_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} = \bar{\nabla}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} + \mathbf{H}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]},$$

by bilinearity of the LIE bracket we get

$$\begin{aligned} [\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] &= [\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}] + [\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] + [\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] + [\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}] \\ &= \bar{\nabla}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} + \mathbf{H}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}, \end{aligned}$$

which, being $[\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] - \mathbf{H}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} = P_V \cdot [\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}]$, can be written as

$$[\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}] - \bar{\nabla}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} + P_V \cdot [\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}] = [\mathbf{H}_{\mathbf{v}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}] + [\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}, \mathbf{H}_{\mathbf{u}}].$$

The tensoriality of the curvature $P_V \cdot [\mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}}]$, as a function of the horizontal lifts $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$ and $\mathbf{H}_{\mathbf{v}}$, has the following implication. Let the local vector fields $\mathcal{F}_{\mathbf{u}}^x, \mathcal{F}_{\mathbf{v}}^x \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$ be generated by dragging the vectors $\mathbf{H}_{\mathbf{u}_x}, \mathbf{H}_{\mathbf{v}_x} \in T_{s_x}\mathbf{E}$ along the flows of the extended vertical derivatives $\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{u}}^x \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}} := T\mathbf{Fl}_{\lambda}^{\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}} \circ \mathbf{H}_{\mathbf{u}_x},$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{v}}^x \circ \mathbf{Fl}_{\lambda}^{\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}} := T\mathbf{Fl}_{\lambda}^{\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}} \circ \mathbf{H}_{\mathbf{v}_x}.$$

By tensoriality, in evaluating the r.h.s. of the previous equality at a point $s(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}$, the horizontal lifts $\mathbf{H}_u, \mathbf{H}_v \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$ can be substituted by the vector fields $\mathcal{F}_u^x, \mathcal{F}_v^x \in C^1(\mathbf{E}; T\mathbf{E})$. Then, by definition:

$$[\mathcal{F}_v^x, \bar{\nabla}_u]_x = 0, \quad [\bar{\nabla}_v, \mathcal{F}_u^x]_x = 0,$$

so that

$$[\mathbf{H}_v, \bar{\nabla}_u]_x + [\bar{\nabla}_v, \mathbf{H}_u]_x = [\mathcal{F}_v^x, \bar{\nabla}_u]_x + [\bar{\nabla}_v, \mathcal{F}_u^x]_x = 0.$$

The result holds for any extension of the natural derivatives and the formula for the curvature is independent of the extension, since, by tensoriality, it depends only on the values of the vertical derivatives at $s(\mathbf{x})$. ■

5. Connection on a vector bundle

For the sake of completeness, let us resume the peculiar properties of linear connections on a vector bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ to infer the relevant special expression of the curvature form.

Definition 5.1 (Linear connection). *In a vector bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ a connection is linear if the pair made of the horizontal lift $\mathbf{H}_v \in C^1(\mathbf{E}; H\mathbf{E})$ and of the vector field $v \in C^1(\mathbf{M}; T\mathbf{M})$ is a linear vector bundle homomorphism from the vector bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ to the vector bundle $T\mathbf{p} \in C^1(T\mathbf{E}; T\mathbf{M})$. This means that, given two sections $s_1, s_2 \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$, the following property of $\mathbf{p}$ - $T\mathbf{p}$ -linearity holds:*

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{v_x}(s_1 +_{\mathbf{p}} s_2) = \mathbf{H}_{v_x}s_1 +_{T\mathbf{p}} \mathbf{H}_{v_x}s_2, \\ \mathbf{H}_{v_x}(\alpha \cdot_{\mathbf{p}} s) = \alpha \cdot_{T\mathbf{p}} \mathbf{H}_{v_x}s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Since the natural derivative is $\mathbf{p}$ - $T\mathbf{p}$ -linear

$$\begin{cases} T_{v_x}(s_1 +_{\mathbf{p}} s_2) = T_{v_x}s_1 +_{T\mathbf{p}} T_{v_x}s_2, \\ T_{v_x}(\alpha \cdot_{\mathbf{p}} s) = \alpha \cdot_{T\mathbf{p}} T_{v_x}s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

the $\mathbf{p}$ - $T\mathbf{p}$ -linearity of the horizontal lift $\mathbf{H}_{v_x}$ is equivalent to $\mathbf{p}$ - $T\mathbf{p}$ -linearity of the vertical derivative $\bar{\nabla}_{v_x}$:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_{v_x}(s_1 +_{\mathbf{p}} s_2) = \bar{\nabla}_{v_x}s_1 +_{T\mathbf{p}} \bar{\nabla}_{v_x}s_2, \\ \bar{\nabla}_{v_x}(\alpha \cdot_{\mathbf{p}} s) = \alpha \cdot_{T\mathbf{p}} \bar{\nabla}_{v_x}s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

The distinguishing feature of a linear vertical bundle, with respect to a general fiber bundle, is that by means of the linear isomorphism provided by the vertical lifting, the vertical derivative $\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; V\mathbf{E})$ can be identified with a section $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ of the vector bundle. The result stated below in proposition 5.1 makes appeal to this identification and is a basic property of the covariant derivative in a linear connection (see e.g. (Kobayashi, 1957), (Kobayashi and Nomizu, 1963)).

Proposition 5.1 (Leibniz rule for the covariant derivative). *In a vector bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ endowed with a linear connection, the covariant derivative $\nabla_{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{s}(\mathbf{M}); \mathbf{E})$ fulfils LEIBNIZ rule*

$$\nabla_{\mathbf{v}}(f\mathbf{s}) = (\nabla_{\mathbf{v}}f)\mathbf{s} + f(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{s}). \quad (20)$$

In a vector bundle $\mathbf{p} \in C^1(\mathbf{E}; \mathbf{M})$ the iterated and the second covariant derivatives according to a given connection are meaningful. Hence, for any section $\mathbf{s} \in C^1(\mathbf{M}; \mathbf{E})$, the curvature form may be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{s})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]})\mathbf{s} \\ &= (\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{v}}^2 - \nabla_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^2 + \nabla_{T(\mathbf{u}, \mathbf{v})})\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (21)$$

in terms of the second covariant derivative $\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{v}}^2 := \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}}$ and of the torsion form $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}$ which are both tensor fields. Tensoriality may be proven by relying on LEIBNIZ rule Eq. (20) to verify $C^\infty(\mathbf{E}; \mathbb{R})$ -linearity.

Remark 5.1. *On a nonlinear fiber bundle, in the curvature formula provided by Theorem 4.1: $\mathbf{R}(\mathbf{s})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}](\mathbf{s}) - \bar{\nabla}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(\mathbf{s})$, the term $[\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}](\mathbf{s})$ cannot be written as $(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}\bar{\nabla}_{\mathbf{v}} - \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\bar{\nabla}_{\mathbf{u}})\mathbf{s}$. Indeed, since $\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbf{E}; V\mathbf{E})$, the compositions $\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}$ and $\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\bar{\nabla}_{\mathbf{u}}$, are not defined, unless the bundle is a vector bundle so that, by relying upon the vertical lifting, the identification $V\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}$ and the consequent substitution $\bar{\nabla} \rightarrow \nabla$ can be made.*

6. Conclusions

Connections on fiber bundles and their torsion and curvature forms are of primary importance in many basic issues of mathematical physics, as witnessed by a vast number of contributions in literature (see e.g. (Mangiarotti and Sardanashevily, 2000)).

The topic has been revisited here with the aim of providing a direct proof to the relation between the integrability condition provided by FROBENIUS theorem and the expression of the curvature field in terms of vertical derivatives. This result, in the general form provided here, appears to be new, since classical treatments deal with linear connections on vector bundles. The proposed proof does not require additional geometric structure on the fiber bundle, being based on the notion of natural derivative of a section, on a suitable extension, by foliation, to a vector field in the tangent bundle, and on a simple but powerful tensoriality argument.

References

- Ambrose W., Palais R.S. and Singer I.M. (1960) Sprays, *Acad. Brasileira de Ciencias* **32**, 163–178.
- Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M. (1982,1989) *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Publishing Company, New York, Part I: Basics, Part II: Applications.
- Dieudonné, J. (1969) *Treatise on Analysis*. Vol I-IV. Academic Press, New York (1969-1974)
- Ehresmann, C. (1950) *Les connexions infinitésimal dans une espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie Bruxelles, 29–55, G. Thone & Masson, Paris.
- Kobayashi, S. (1957) *Theory of connections*, Ann. Mat. Pura Appl. **42**, 119–194.
- Kobayashi, S., Nomizu, K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Wiley-Interscience, New York.
- Kolar, I., Michor, P.W., Slovák, J. (1993) *Natural operations in differential geometry*, <http://www.mat.univie.ac.at/~michor/kmsbookh.pdf>.
- Lang, S. (1995) *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag.
- Libermann, P. (1969) Sur les prolongements des fibrés principaux et groupoides, *Sem. Anal. Glob. Montréal*, 7–107.
- Libermann, P. (1973) Parallélismes, *J. Diff. Geom.*, **8**, 511–539.

- Libermann, P. (1982) Remarques sur les systèmes différentiels, *Cahiers de Top. et Geom. Diff.* **23** (1) 55–72.
- Mangiarotti, L., Modugno, M. (1984) Graded Lie algebras and connections on a fibred space, *Journ. Math. Pures et Appl.* **83**, 111–120.
- Mangiarotti, L., Sardanashvily, G. (2000) *Connections in Classical and Quantum Field Theory*, Word Scientific, Singapore.
- Michor, P.W. (1997) The Jacobi flow, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, **54** (4) 365–372.
- Michor, P.W. (2007) *Topics in Differential Geometry*, September 30, <http://www.mat.univie.ac.at/michor/dgbook.html>.
- Romano G. (2007) *Continuum Mechanics on Manifolds*, University of Naples Federico II, Lecture notes, <http://wpage.unina.it/romano>.
- Saunders, D.J. (1989) *The Geometry of Jet Bundles*, London Mathematical Society Lecture Note Series. 142, Cambridge University Press.
- Spivak, M. (1979) *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I–V, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 3rd edn. Publish or Perish, Inc., Houston (2005).

Il ruolo dell'anidride carbonica negli equilibri ecologici ed economici del pianeta terra

Nota di Mosè Rossi^{1,*}

Presentata dal socio Mosè Rossi
(Adunanza del 8 Novembre, 2013)

Key words: carbon cycle, carbonic anhydride, carbon capture, carbonic anhydrase, carbonate utilization

Abstract. Carbonic anhydride (CO₂) has an essential role in the carbon cycle involving all the carbon atoms of the earth. CO₂ contributes to all the energetic, economic and ecologic equilibria of the planet. In the last years, the massive utilization of fossil fuels has generated an increase of the atmospheric concentration of CO₂, due to the perturbation of the natural equilibrium between that produced and utilized and an increase of global heating.

Will be discussed the role and the impact of the CO₂ on the life on the earth and the technologies to capture and reutilize it for the production of biofuels and products at high added value

Riassunto. L'anidride carbonica (CO₂) svolge un ruolo essenziale nel ciclo cui partecipano tutti gli atomi di carbonio della terra. Essa contribuisce agli equilibri energetici, ecologici ed economici del pianeta. Il massiccio utilizzo dei carburanti fossili ha portato, negli ultimi anni, all'aumento della concentrazione atmosferica della CO₂, alla perturbazione del naturale equilibrio tra quella prodotta e utilizzata e all'aumento del riscaldamento globale.

1. Via Pietro Castellino, 111-80131 Naples (Italy); IBBR-CNR

* Author to whom correspondence should be addressed

Mosè Rossi Professore emerito di Enzimologia all'Università Federico II di Napoli, già Direttore dell'Istituto di Biochimica delle Proteine del CNR, associato all' IBBR-CNR Napoli e al CRIB Università Federico II Napoli.

Occorre dunque ridurre la quantità di CO₂ generata o provvedere a catturarla, depositarla e utilizzarla.

Si discuteranno il ruolo e l'impatto della CO₂ sulla vita sulla terra e le tecnologie atte a catturare la CO₂ e a riutilizzarla per la produzione di carburanti e prodotti ad alto valore aggiunto.

1 - INTRODUZIONE

Gli organismi viventi e la materia inanimata sono composti da molecole che hanno proprietà molto diverse. Mentre in una roccia non si individua la funzione dei differenti minerali in essa presenti, l'unità fondamentale degli

organismi viventi, la cellula, è dotata di una struttura complessa e molto ordinata e le molecole che la compongono hanno in essa una ben determinata funzione.

La chimica di tutti gli organismi viventi si basa sull'atomo di carbonio, che è coinvolto nella formazione dei diversi tipi di molecole organiche comuni, come acidi nucleici, proteine, zuccheri e grassi, in essi contenuti.

La complessità molecolare e l'ordine della materia vivente hanno profonde implicazioni. Poiché i processi spontanei vanno verso il disordine, gli organismi viventi hanno bisogno dell'energia necessaria a creare e mantenere la loro struttura così ordinata. Dove si procurano questa energia? Tutti gli organismi viventi derivano tale energia dalla luce del sole.

Le piante, mediante la fotosintesi, intrappolano l'energia radiante della luce solare per convertire l'anidride carbonica (CO₂) presente nell'aria e l'acqua in composti ricchi di energia, come amido e cellulosa, rilasciando ossigeno (O₂) nell'atmosfera.

Gli organismi non fotosintetici, come gli animali, si procurano l'energia necessaria per vivere ossidando con l'O₂ i composti ricchi di energia delle piante di cui si nutrono, e rilasciando nell'ambiente la CO₂ e altri prodotti di scarto. Grazie a questo ciclo, una fonte primaria di carbonio per tutti gli esseri viventi è rappresentata dalla CO₂ presente nell'atmosfera che ha una concentrazione, recentemente superata, di circa 400 parti per milione (400 ppm).

2 - IL CICLO DEL CARBONIO

Quello appena descritto rappresenta il ciclo 'rapido' del carbonio. Il carbonio, tuttavia, può anche rimanere in gran parte negli organismi e nelle

piante morte che possono, a loro volta, essere trasformate, attraverso la fossilizzazione, in carbone, grafite, petrolio, gas etc. Se bruciate, queste sostanze restituiranno il carbonio come CO_2 , chiudendo il ciclo (ciclo 'lungo').

Il ciclo del carbonio, descritto nella **Figura 1**, è una complessa serie di processi attraverso i quali ruotano tutti gli atomi di carbonio esistenti sulla terra. Gli stessi atomi di carbonio, presenti oggi nell'organismo di una persona, sono stati utilizzati in altre innumerevoli molecole e in altri organismi, sin dall'origine dei tempi (**Boxino 1 e 2**).

La CO_2 prodotta tanti anni fa, attraverso la fotosintesi, può essere diventata parte di una pianta e parte dell'individuo che della pianta si è nutrito. Ognuno di noi potrebbe aver incamerato del carbonio che è appartenuto a grandi personaggi dell'antichità come Platone, S. Agostino o Federico Barbarossa e così via.

Il ciclo del carbonio rappresenta il grande naturale riciclaggio degli atomi di carbonio e la sua alterazione può determinare cambiamenti drammatici in ogni aspetto della vita sulla Terra.

Per molti anni, la concentrazione di CO_2 nell'atmosfera è stata abbastanza stabile ma, negli ultimi 150 anni, la CO_2 ritrovata nell'ambiente è aumentata costantemente. Tale aumento è correlato alla rivoluzione industriale, iniziata nel 1850, con attività quali la combustione di carbone, petrolio e gas, la produzione di cemento e la deforestazione, che determinano il rilascio in atmosfera di ingenti quantità di CO_2 .

La quantità di CO_2 rilasciata o prodotta a causa delle attività antropiche è stata superiore a quella catturata dalle biomasse, alberi e vegetali, dal mare e da altri siti (**Boxino 1 e 2**), il che ha determinato un innalzamento continuo della concentrazione di CO_2 nell'atmosfera, da circa 280 parti per milione (ppm) agli attuali 400.

La CO_2 è, inoltre, utilizzata a livello industriale (**Boxino 3**) ed ha un ruolo nella salute dell'uomo (**Boxino 4**).

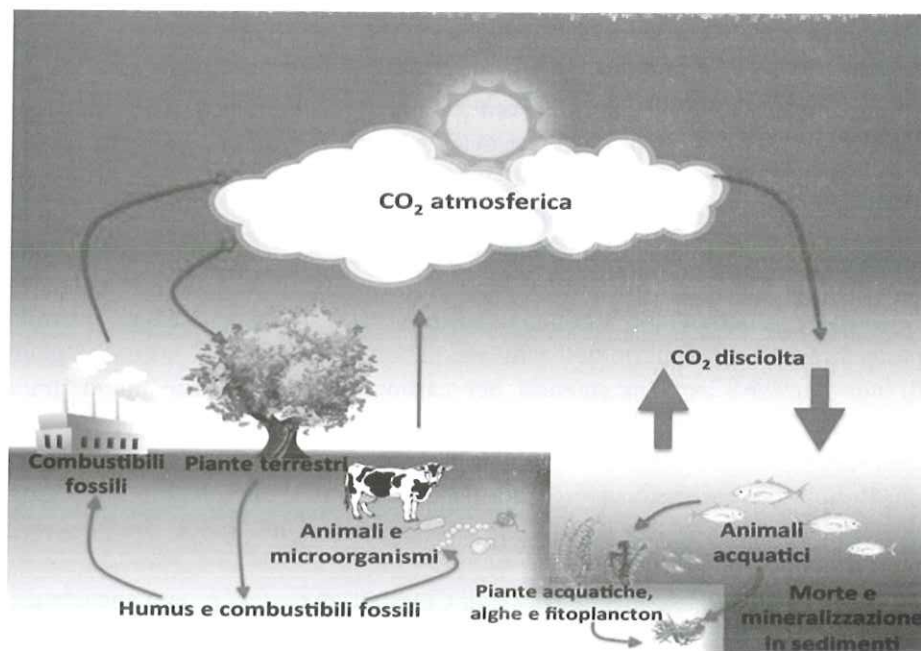


Figura 1: Ciclo del carbonio.

3 - LA CO₂, L'EFFETTO SERRA E I PROBLEMI DELL'AMBIENTE

La CO₂, unitamente al vapore acqueo, al metano, all'ozono e altri gas, è uno dei più importanti "gas serra" presenti nella troposfera, che, con uno spessore dai 10 ai 15 Km, costituisce la parte più bassa dell'atmosfera.

Quando la luce del sole raggiunge la terra, una parte di essa è convertita in calore che i gas serra assorbono e, in parte, intrappolano vicino alla superficie terrestre, riscaldandola. La quantità di calore intrappolato nella troposfera, che determina la temperatura sulla terra, dipende dalle quantità dei gas serra in essa presenti.

Questo meccanismo, chiamato "Effetto Serra", regola la temperatura della terra permettendo la vita stessa. Infatti senza effetto serra la terra sarebbe coperta di ghiaccio.

L'aumento della concentrazione dei gas serra causa un aumento della temperatura della terra e ne influenza il clima.

Il "riscaldamento globale" della terra può avere effetti catastrofici e causare sconvolgimenti climatici, fino alla fusione dei ghiacci polari, con un aumento del livello dell'acqua del mare, con risvolti negativi sul clima, sulle risorse di

acqua, l'industria, l'agricoltura, il cibo e la salute.

Il mare (**Figura 1 e Boxino 2**) gioca un ruolo importantissimo in quanto è il più grande contenitore di CO_2 del pianeta. Si stima che, nel mare, siano disciolte circa 40 mila miliardi di tonnellate di CO_2 , quantità di circa 20 volte superiore a quella che si ritrova nell'atmosfera.

Il mare costituisce anche un meccanismo di regolazione della quantità di CO_2 nell'atmosfera. Infatti un aumento della quantità relativa di CO_2 nell'atmosfera fa aumentare la quantità di CO_2 disciolta nell'acqua, mentre un aumento di temperatura, conseguente all'effetto serra, la fa diminuire.

Un altro reale pericolo è che l'acido carbonico, prodotto dalla dissoluzione di CO_2 in acqua, provochi un aumento dell'acidità del mare che è stata stabile per 20 milioni di anni. Si ritiene che se la CO_2 continuasse ad aumentare, l'acidità, per il 2100, potrebbe incrementare di quattro volte con effetti catastrofici sull'ecosistema marino e sulle specie che dipendono da esso incluso l'uomo.

BOXINO I

Origine e produzione della CO_2

La CO_2 può provenire da:

a) Sorgenti naturali quali:

- L'emissione da vulcani in attività
- La combustione e il decadimento di materia organica
- La respirazione degli organismi viventi che ossidano prodotti ricchi di energia per vivere .

b) Sorgenti generate da attività umane quali:

- Combustione di carbone, petrolio, gas per produrre l'energia necessaria alla vita quotidiana e alle attività lavorative e industriali.

BOXINO 2

Chi consuma o cattura la CO₂:

a) Le piante, le alghe e altre specie che convertono, mediante la fotosintesi clorofilliana, la CO₂ presente nell'aria in carboidrati e altri composti ricchi di energia, utilizzando le radiazioni solari.

I prodotti della fotosintesi sono una sorgente di cibo e sono utilizzati per costruire nelle cellule molecole complesse come polisaccaridi, acidi nucleici e proteine e altri composti che permettono la vita degli organismi.

b) Il mare che assorbe e rilascia CO₂ attraverso la interfaccia aria-acqua. La quantità di CO₂, nel mare negli strati superficiali, espressa come carbonio inorganico totale, è di circa 1 Kg per 1.000 litri di acqua (1 mc = 1 metro cubo), ma è scarsa nelle acque profonde che ne potrebbero contenere da 1,5 kg /mc a 15°C e 2,7 Kg /mc a 0°C. Quantità enormi.

c) Il fitoplancton, che nel mare è alla base della catena alimentare, utilizza per crescere e duplicarsi la CO₂ convertendola in carbonio organico.

BOXINO 3

Utilizzo della CO₂

L'anidride carbonica è utilizzata nella preparazione delle bibite, tipo Coca-cola, aranciate e birra in quanto le rende frizzanti e produce un senso di piacevole freschezza in bocca. In forma di bicarbonato è utilizzata come lievito chimico in quanto, ad alta temperatura, liberando il gas, fa lievitare gli impasti per il pane, dolci etc. E' utilizzata negli estintori per spegnere gli incendi in quanto, essendo più pesante dell'aria, avvolge le fiamme e non permette all'ossigeno presente nell'aria di ravvivare il fuoco. La CO₂, nella forma liquida, che si può ottenere facilmente per compressione, è un fluido, cosiddetto, "Supercritico" ed è molto usata, nell'industria, per estrarre principi attivi o sostanze di interesse, per esempio da piante, che sono poi utilizzate nell'industria cosmetica ed in quella farmaceutica. Infatti la CO₂ liquida è un ottimo solvente ed ha il grande vantaggio che, dopo l'estrazione, il principio attivo e può essere recuperato diminuendo la pressione o innalzando la temperatura. Con tale tecnica si estrae la caffeina dal caffè per produrre il caffè decaffeinato. La CO₂ è inoltre utilizzata per recuperare il petrolio da pozzi di idrocarburi, o impoveriti o molto densi, in quanto agisce, allo stesso tempo, come agente pressurizzante e solvente riducendo la viscosità del petrolio e il suo recupero. In forma solida, la CO₂ prende il nome di ghiaccio secco ed è usata per il trasporto di prodotti deperibili e gelati a -78°C.

BOXINO 4**CO₂ e salute**

Gli organismi, quali animali, piante funghi e in parte batteri, che ottengono l'energia per proliferare ossidando zuccheri, grassi, aminoacidi e altro con ossigeno, producono la CO₂ come prodotto terminale. Questo processo costituisce la respirazione cellulare. Negli animali superiori la CO₂ è trasportata, nel sangue, dai tessuti ai polmoni dove è rilasciata.

Ha, inoltre, il ruolo di mantenere il rapporto acido-base del sangue nelle condizioni ottimali permettendo il trasporto e l'utilizzo dell'ossigeno e l'allontanamento del prodotto di ossidazione del carbonio .

4 - QUANTA CO₂ È EMESSA DAGLI UOMINI ANNUALMENTE SULLA TERRA ?

Come le macchine generano l'energia necessaria per il moto bruciando gli idrocarburi con l'ossigeno e producendo CO₂, l'organismo umano vive e si riproduce ossidando il cibo con ossigeno producendo CO₂.

Una persona emette mediamente circa 450 litri di CO₂ al giorno, che corrispondono a circa 900 g di gas.

Poiché la popolazione della terra è di circa 7 miliardi di persone, la produzione annuale di CO₂, per 365 giorni, è di circa $0.9 \times 365 \times 7.000.000.000 = 2.1$ miliardi di Tonnellate per anno (1 Tonnellata = 1.000 Kg).

5 - QUANTA CO₂ È EMESSA ANNUALMENTE DA ANIMALI (BOVINI) ?

I bovini sono ritenuti, secondo un rapporto delle Nazioni Unite, una grave minaccia per il clima, le foreste e l'ambiente in quanto, oltre alla CO₂, producono metano che ha un effetto serra di circa 23 volte maggiore di quello della CO₂.

Si è calcolato che la CO₂ prodotta dai 0,3 miliardi di bovini allevati nel mondo in un anno, è di circa 2 miliardi di tonnellate cioè quasi uguale a quella prodotta da 7 miliardi di uomini.

6 - LA CO₂ PRODOTTA DA ATTIVITÀ ANTROPICHE.

E' necessario avere la consapevolezza che ogni lavoro effettuato che richiede energia, lascia una grande scia di CO₂ emessa lungo la strada. In genere, non si è pienamente consapevoli delle implicazioni effetto-serra di azioni comuni. Questo è un grave problema ai fini del risparmio energetico e della produzione di CO₂. Per evidenziare questo aspetto con un esempio concreto, un ricercatore americano, Jamais Cascio, ha calcolato la quantità di energia necessaria per preparare un cheeseburger, un panino con formaggio e carne arrostita, e la conseguente produzione di CO₂ coinvolta.

Ha utilizzato una pubblicazione del 2000 "Energy use in the food sector" (L'uso dell'energia nel settore del cibo), che esplora e calcola tutte le azioni che portano alla produzione di un cheeseburger, dalla crescita alla macinazione del grano per il pane, dalla crescita, mattanza, produzione, macinazione e congelamento della carne del bovino, la produzione del latte per fare il formaggio e la preparazione e cottura del burger.

Si è calcolato che, per ottenere un cheeseburger medio di 130 gr, si producono 4,35 Kg (0,0435 T) di CO₂.

Ammettendo che, in media, i circa 300 milioni di cittadini Americani mangino 3 burger la settimana, la quantità di CO₂ prodotta ogni anno è: 150 (burger per anno) x 300.000.000 x 0.0435(Tonn) = 195.750.000 tonnellate di CO₂ che equivale, giusto per fare un paragone, alla produzione di CO₂ annuale di 19,6 milioni di macchine tipo SUV.

Questo è solo un esempio del calcolo dell'influenza di una attività prosaica sul ciclo del carbonio che mette in evidenza, in una maniera non ovvia, come il nostro comportamento, con le scelte conseguenti, abbia un profondo impatto sul nostro pianeta e la nostra civilizzazione.

7 - CO₂ E PRODUZIONE DI ENERGIA

L'uomo, per produrre energia per il lavoro, brucia i carburanti fossili che sono stati depositati nelle viscere della terra per milioni di anni rilasciando nell'atmosfera circa 24.1 miliardi di T all'anno di CO₂. Le sorgenti primarie sono da identificare nel carbone, il petrolio e i gas utilizzati per la produzione di energia elettrica e per i motori. Per avere un'idea delle quantità di CO₂ generate ci si può riferire ad un impianto che brucia carbone e produce energia per dare elettricità ad una piccola città. Tale centrale consuma circa 3000 T di carbone al giorno, ed emette 2.32 T di CO₂ per T di carbone per un totale di circa 7000 T al giorno.

Da questi dati si deduce che la quantità di CO₂ di cui si discute è molto

grande. Altro dato interessante è che bruciando 1 litro di benzina come combustibile, si producono 2320 g (2,32 Kg) di CO₂ equivalenti a 1269 litri di gas. Una macchina più o meno potente e moderna produce, per Km percorso, dai 100 ai 250 o più grammi di CO₂.

Se si tiene conto del numero di macchine esistenti sulla terra e dei Km percorsi, si può avere un'idea delle immense quantità di CO₂ generata.

La CO₂ prodotta dagli uomini per vivere, respirando, è circa l'8,8 % di quella prodotta con le attività antropiche, quantità abbastanza irrilevante rispetto al totale. Insomma possiamo respirare senza eccessive preoccupazioni!

Il problema reale è connesso alla globalizzazione dell'economia che spinge ogni paese a una maggiore industrializzazione e ad un incremento delle produzioni, con un aumento della domanda di energia e conseguente aumento delle emissioni. Per tali ragioni le emissioni totali di gas serra sono in continuo aumento. Nel periodo tra il 1970 e il 2004 le emissioni di CO₂ sono aumentate in media dell'1,9% l'anno. I maggiori produttori di CO₂, in toto, sono gli USA e la Cina con circa il 17% delle emissioni globali, mentre l'Unione europea si attesta all'11%. Le T di CO₂ emesse, per persona per anno, sono 24 per gli

USA, 6 per la Cina e circa 11 per l'Europa evidenziando che le emissioni pro capite sono più alte nei paesi più industrializzati. Si prevede che nei prossimi vent'anni la produzione mondiale di elettricità raddoppierà con il conseguente aumento della quantità di CO₂ nell'atmosfera. Come rimediare?

8 - RIDUZIONE ATMOSFERICA DELLA CO₂: RIMEDI PROPOSTI

Per affrontare questo grave problema sono state organizzate numerose riunioni. Il protocollo di Kyoto firmato nel 1997 richiede ai paesi industrializzati di ridurre, entro il 2012, le emissioni ai livelli del 1990.

La strategia per controllare la concentrazione di CO₂ nell'atmosfera è di ridurre la produzione e il rilascio nell'atmosfera (SBC Energy Institute Report, 2012).

Si stanno sviluppando tecnologie alternative all'utilizzo di carburanti per produrre energia sfruttando l'energia del vento, quella solare, quella nucleare, quella geotermica e di altro tipo. Tuttavia non è pensabile che queste tecnologie alternative possano far fronte alla richiesta di energia nei prossimi anni, anche per ragioni di costi, e che paesi in forte sviluppo, come la Cina e l'India, che hanno grandi riserve di carbone, non lo utilizzino per produrre energia a basso costo.

Esiste allora la forte esigenza di catturare o utilizzare (**Boxino 3**) o depositare da qualche parte la enorme quantità di CO₂ prodotta. Gli approcci proposti sono molteplici ed un requisito comune a questi approcci è che la CO₂

deve essere prima separata e concentrata dai fumi di combustione del carbone da altri gas nocivi. La quantità di CO_2 nei fumi è dell'ordine del 10-15%. Sono state sviluppate varie tecnologie basate su operazioni a membrana o l'utilizzo di composti chimici o adsorbenti fisici solidi che assorbono e poi rilasciano il gas.

Un altro approccio tecnologico interessante è quello biomimetico, basato sull'utilizzo di materiali biologici. Essi possono costituire una valida alternativa a metodi chimici basati su sostanze ad alto impatto ambientale. Gli organismi viventi costituiscono splendidi esempi di come si possa sciogliere nel sangue la CO_2 che si forma nel corpo, con l'ossidazione con ossigeno dei composti ricchi di energia, per poi rilasciarla come gas nei polmoni e poi nell'ambiente.

Questo meccanismo è legato alla vita in quanto si attiva alla nascita, al primo respiro, e si blocca alla morte alla esalazione dell'ultimo (**Boxino 4**).

L'idea è stata: è possibile utilizzare tale sistema per catturare la CO_2 dalle varie emissioni? La risposta è positiva in linea di principio in quanto è stato isolato un enzima, chiamato anidrasi carbonica, che sovrintende al meccanismo di cattura e rilascio nel corpo umano della CO_2 .

Il problema è stato trovare un enzima che fosse stabile e attivo per lungo tempo nelle condizioni operative. Un nostro progetto di ricerca in corso svolto in collaborazione tra ENEL, CRIB, Università Federico II e l'IBP CNR di Napoli, ha identificato e caratterizzato un'anidrasi carbonica molto stabile e attiva da un microrganismo che vive ad alta temperatura, che ha le caratteristiche per catturare e poi rilasciare la CO_2 (Capasso *et al.*, 2012; Di Fiore *et al.*, 2013; Akdemir *et al.*, 2013).

Il sistema biomimetico offre indubbi vantaggi in quanto il processo è effettuato in soluzione acquosa, è specifico per il sequestro della CO_2 , è compatibile con l'ambiente e la concentrazione ed il trasporto della CO_2 sono meno costosi.

Ma, una volta catturata come la trasportiamo o utilizziamo o dove confiniamo tanta anidride carbonica?

Esistono e sono operative tecniche per liquefare la CO_2 , trasportarla in condotte sino ai siti di stoccaggio ed iniettarla nel sottosuolo in giacimenti esauriti di idrocarburi e gas dove, poiché pesante, si deposita.

L'iniezione di CO_2 è un processo già utilizzato dalla industria petrolifera per recuperare residui di idrocarburi o idrocarburi troppo densi e per aumentare la pressione per la fuoriuscita del petrolio.

Un'altra tecnica è quella di precipitare la CO_2 come sale di calcio facendola reagire in giacimenti acquiferi salini sotterranei ricchi di sali oppure utilizzando acqua di mare o residui, per esempio, della dissalazione dell'acqua di mare, per produrre carbonati di calcio e magnesio utilizzabili nell'industria

del cemento.

Questa tecnologia è ecologicamente compatibile in quanto i carbonati sono stabili e costituiscono i sali più abbondanti sulla superficie terrestre. Un'altra tecnica con grandi prospettive è utilizzarla per coltivare microalghe che crescono fissando la CO₂ e producono biocarburanti e altre sostanze ad alto valore aggiunto. Da un punto di vista pratico, nel futuro, l'idea è di utilizzare la CO₂ prodotta dalla combustione del carbone per coltivare alghe che crescono rapidamente accumulando energia sotto forma di oli vegetali utilizzabili come carburanti. Con questa tecnologia oltre a ridurre i combustibili fossili si ottengono biocarburanti rinnovabili per tutti gli usi (Spall *et al.*, 2011).

Altre tecnologie che utilizzano la CO₂ per trasformarla in prodotti ad alto valore aggiunto (combustibili, prodotti chimici e altro) sono in corso di sviluppo e non sono ancora utilizzate a causa degli alti costi.

In conclusione esistono tutte le premesse per il riutilizzo della CO₂ per la produzione di energia e di molti altri prodotti utili e, per queste ragioni, lo sviluppo delle tecnologie coinvolte è uno dei campi di ricerca e sviluppo più finanziati a livello mondiale.

9- BIBLIOGRAFIA

SBC Energy Institute Report (2012): Carbon Capture and storage.

Capasso C., De Luca V., Carginale V., Cannio R. and Rossi M. (2012) Biochemical properties of a novel and highly thermostable bacterial alpha-carbonic anhydrase from *Sulfurihydrogenibium yellowstonense* YO3AOP1. *J Enzyme Inhib Med Chem.* **27**, 892-897.

Di Fiore A., Capasso C., De Luca V., Monti S.M., Carginale V., Supuran, C.T., Scozzafava A., Pedone C., Rossi M. and De Simone G. (2013) X-ray structure of the first 'extremo-alpha-carbonic anhydrase', a dimeric enzyme from the thermophilic bacterium *Sulfurihydrogenibium yellowstonense* YO3AOP1. *Acta Crystallogr D Biol Crystallogr.* **69**, 1150-1159.

Akdemir A., Vullo D., De Luca V., Scozzafava A., Carginale V., Rossi M., Supuran C.T. and Capasso C. (2013) The extremo-alpha-carbonic anhydrase (CA) from *Sulfurihydrogenibium azorense*, the fastest CA known, is highly activated by amino acids and amines. *Bioorg Med Chem Lett.* **23**, 1087-1090.

Spall K., Jochem F., McCool B. and Chance R. (2011) Algenol's direct to ethanol technology: A cyanobacteria based photosynthetic process for the production of ethanol. South East Biomass Conference November 2, 2011.

The Human Telekinetic Capacities

Nota del socio Antonio Giuditta
(Adunanza del 6 giugno 2014)

Key words: telekinetic capacities, human energy field

Abstract – In 1907 professor Bottazzi concluded his experiments with Eusapia Palladino by proposing that telekinetic events are biological phenomena. We have recently examined his hypothesis by testing the telekinetic capacities of several subjects by a simple procedure. The recorded effects support the view that such capacities may be widely distributed in the human population.

Riassunto – Nel 1907 Il professor Bottazzi concludeva i suoi esperimenti con Eusapia Palladino sostenendo che gli eventi telecinetici sono fenomeni biologici. Noi abbiamo recentemente esaminato la sua ipotesi utilizzando un metodo semplice di valutazione delle capacità telecinetiche di numerosi soggetti. I risultati confermano l'idea che tali capacità siano ampiamente diffuse tra gli uomini.

1 – INTRODUCTION

The human capacity to move objects located beyond the reach of natural limbs (telekinesis) has been repeatedly assessed in talented people since the second half of the 19th century (Alvarado, 1993; de Rochas, 1906; Lodge, 1894). In 1907 professor Bottazzi concluded his experiments with Eusapia Palladino by proposing that telekinetic events are biological phenomena (Bottazzi, 1907; Giuditta, 2010). More recently, a large number of human subjects have been shown to be able to modify the random output of different types of physical instruments by their pre-stated intentions (Dunne, and Jahn, 2005). These data support the view that telekinetic capacities may be widely distributed in the human population. Examining telekinetic events with presently available tools would presumably lead to a better understanding of these events, but the lack of a simple procedure is hindering the identification of these effects.

We have recently approached this problem by devising such a method and using it to test the telekinetic capacities of several subjects under conditions minimizing artificial interferences. The results obtained support the view that

telekinetic abilities are widely distributed in the human population to a markedly different degree.

2 – MATERIALS AND METHODS

Experiments in Naples

The object to be moved telekinetically consisted of a group of plastic dishes (21cm diameter, weighing 47g) that were held together upside down by a little metal screw inserted in their center. The screw ended in a small ring (Figure 1) to which a thin nylon thread (0.14mm thick, about 30cm long) was tied to secure them to a fixed support. The subject sat on a chair at about 2m distance from the dish in a room placed in the third floor of the Biology Department of the Faculty

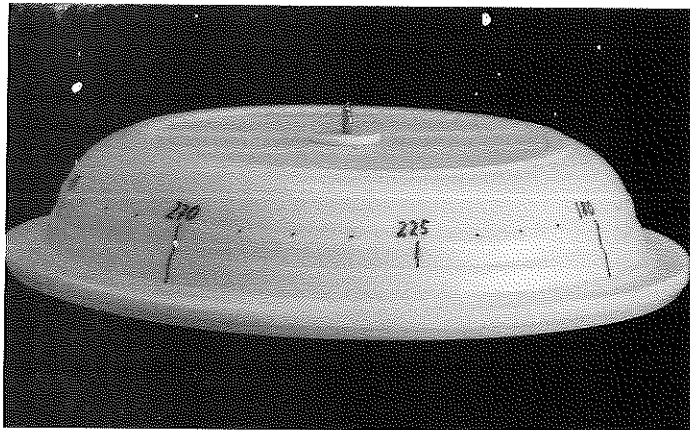


Figure 1 – The dish unit

of Science, Federico II University. The Department is hosted in a century old Jesuit convent built in the historic center of the city, a traffic-free section. Buses and cars run at about 60m away from the room. The building is very robust, with peripheral and inside walls respectively measuring 1.20m and 0.8m in thickness. The room is of large size (5m x 5m) and has a high ceiling (6m high). During sessions, door and window were closed, no one was allowed to enter, subject and experimenter kept quiet postures, and heating devices were not in operation. Light was provided by two series of three pairs of fluorescent lamps hanging at about 2.5m from the dish.

After a few encouraging sessions vertical marks were drawn on the dish circumference to indicate degrees at intervals of about 11°. Dish movements were recorded by a camera and subsequently transferred to a computer and visualized on the screen. Throughout all sessions dish motions were exclusively manifested by rotation on a horizontal plane. Dish position was usually determined every 30s. Data were plotted over time to establish the shape and direction of rotations, and to allow measuring their amplitude and rate. Clockwise and counter-clockwise rotations reported in graphs are indicated by upwards or downward lines.

Two sets of experiments were performed in Naples, the first in the period December 2012-January 2013, the second in the period May-August 2013. Sessions of the first set of experiments included two contiguous 5 min periods. In the first period (the putative control period) the subject was requested to avoid thinking about the forthcoming task by reading a newspaper or talking with the experimenter. On the other hand, in the second period (the experimental period) he was left free to adopt whatever mental strategy made the dish move. In a few late sessions a third 5 min period was added in which the subject was asked to focus on a stressful personal experience (the stress period). Overall, this procedure was used to examine the telekinetic capacities of nine subjects (eight females and one male) and a female pair. Overall their age ranged from 23 to 47 years. In the second set of experiments sessions started while the subject was not in the room (noS period). The camera was turned on by the experimenter or by the subject who left the room soon thereafter. This initial period was followed by an experimental period in which the subject was in the room (S period) and by an additional noS period. Furthermore, since previous data had indicated that dish rotations occurred in back and forth motions (waves), and that the amount of rotation determined in pre-established periods often led to splitting such waves, the amount of rotation was determined for each wave. Whether rotations were occurring in clockwise or counter-clockwise direction was decided according to the direction of the first wave provided it was sizable. In all these sessions a window curtain was sealed to the windowsill by a rod.

Experiments in Calabria

Sessions were held in July 2013 following the latter procedure. The test object was however a single plastic dish identical to those used in Naples. Experiments were made in a small room in the second floor of a recently built house on the Ionian coast. Only few people were in the house, and outside traffic was lacking.

3 – RESULTS

Experiments in Naples

In the first set of experiments the amount of dish rotation was determined in each period to allow comparison between the putative control period in which the lack of conscious intentions by the subject was expected to elicit little or no dish motion, and the experimental period in which the subject's wishing state of mind was expected to elicit larger movements. As shown in Table 1, at variance with these expectations, all subjects succeeded in making the dish rotate during the putative control period to a larger extent than in the following experimental period. In the putative control period, the amount of rotation was highly variable among subjects, exhibiting a 7-fold difference between maximal and minimal values. In addition, in the experimental period the amount of rotation markedly decreased in 8 out of the 10 sessions (on the average, by a 39%). Rotation did not vary in subject S and actually increased by 52% in the female pair Cr+Em.

Dish rotation in the stress period was determined in only 3 sessions. When compared to the first period it decreased 41% in subject V, but markedly increased in subject S (2-fold) and in the female pair Cr+Em (2.6-fold). Dish rotation was also present when the experimenter was the subject, its rate

increasing when he focused on a stressful experience (data not shown). Since the experimenter attended all sessions, the data pertaining to all tested subjects are likely to also reflect his contribution.

Table 1
Dish rotation in C, E, and S periods

	C (D/5')	E (D/5')	S (D/5')	E/C (%)	S/C (%)
M	440	260		59	
A M	400	325		81	
L	310	190		61	
B	255	105		41	
A	238	145		61	
V	205	155	120	76	59
F	155	75		48	
C	110	70		64	
S	62	68	123	110	198
Cr+Em	105	140	275	133	262

C, control; E, experimental; S, stress. D/5', degrees/5 min.

The above results did not appear to be due to air turbulence (see Methods). Notably, dish pitching and pendulum like oscillations that are elicited by artificially produced air currents were never recorded during sessions. Air turbulence was definitely excluded as an interfering factor by the persistence of dish rotations in three 20min sessions in which the experimenter left the room after turning on the camera. In these sessions additional precautions were taken to prevent air currents to reach the dish (Table 2). They included the presence of a large muslin curtain almost fully covering the closed window (only the upper 20cm were not covered), the further sealing of the curtain bottom to the windowsill by an elongated rod, and the additional positioning of a thick cylindrical plastic curtain that completely surrounded the entire length of dish system.

The latter control data and the results obtained in the putative control periods of the first set of experiments raised the problem of what conditions could allow the determination of reliable control values. These considerations led to the second set of experiments in which the subject was not in the room in the initial noS period of noS-S sequences, his presence in the room being allowed only during S periods. Since this procedure yielded preliminary data indicating that dish rotation was 2-fold larger in the S period than in the previous noS period, and 4-fold larger than in the following noS period (data not shown), additional similar sessions were planned. The results of five such sessions are summarized in Table 3. They regard noS-S-noS-S-noS-S sequences with periods lasting 10min. Data are presented as the amount of rotation per wave occurring in each period, and as the ratio of rotations in S periods with respect to rotations in the

previous noS period. Out of 15 ratios, 12 ranged from 1.29 to 3.6 and only 3 approached unity.

Table 2
Control sessions

Condition	D/5'
Window curtain	199
Window curtain plus	48
Thick plastic around	164

D/5', degrees/5 min

In additional experiments several effects were observed that are worth brief mention for their interest but that clearly require further work to be confirmed. When the subject tried to divert his conscious intention by reading a book during the S period, rotations recorded in that period and in subsequent noS and S periods were still 2-fold larger than in the previous noS period. On the other hand, when the subject did not wish to move the dish in the first S period but did so in the second S period, rotations kept declining in the initial noS-S-noS segment of the sequence but markedly increased (more than 5-fold) in the second S period and in the last noS period with respect to rotations in the noS period preceding them.

Experiments in Calabria

In a noS-S-noS session with periods lasting 5, 5, and 10min, the two waves present in the S period and in the following noS period were markedly larger than in the initial noS wave (respectively 4.47-fold and 3.68-fold). In a comparable noS-S-noS sequence in which periods lasted 20, 10, and 10min, rotations in the two S waves were 1.5-fold and 2.0-fold larger than the preceding noS wave. They were also 1.42-fold and 1.89-fold larger than the last wave of the second noS period.

Interesting results were also obtained with a teenager who was tested by himself in the first S period of a noS-S-noS-S-noS sequence and together with his girl friend in the second S period. When tested by himself, the two S waves moving clockwise were 2.11-fold and 3.66-fold larger than the previous noS wave. Furthermore, larger rotations (2.22-fold, and 1.83-fold) also occurred in the two following noS waves. Conversely, when he was tested together with his girl friend, no increment took place in the S period and only a delayed 1.95-fold increment occurred in the final noS period. The possibility of a contrasting role played by his girl friend was confirmed when she was tested by herself in the second S period of a comparable sequence in which waves moved in a counter clockwise direction and were 4.86-fold larger than the previous noS wave.

4 – DISCUSSION

The possible artifacts that might be considered responsible of the dish motions include air currents and building vibrations. They are briefly discussed below following the premise that all dish motions recorded in our experiments were exclusively rotations on a horizontal plane. This implies that movements such as tilting, rocking or pendulum-like oscillations were never observed.

Table 3							
Dish rotation in noS-S-noS-S-noS-S sessions.							
Session		noS	S	noS	S	noS	S
1	Wave	1	2, 3	4	5	6	7
	Degrees	96	158+138=296	84	89	101	161
	S/noS		3.08		1.06		1.59
2	Wave	1	2	3	4	5	6
	Degrees	90	237	223	272	288	232
	S/noS		2.63	2.48	3.02	3.2	2.58
3	Wave	1	2, 3	4	5	6	7
	Degrees	255	126+58=184	80	170	161	159
	S/noS		0.72		2.1	2.01	1.98
4	Wave	1	2, 3	4	5	6	7
	Degrees	177	196+164=360	152	122	144	186
	S/noS		3.6		0.80		1.29
5	Wave	1	2, 3	4	5, 6	7	8, 9
	Degrees	137	121+69=190	150	201+123=324	174	180+121
	S/noS		1.39		2.16		1.73

With regard to air currents, possible sources were excluded by the precautions mentioned under Methods and by those described in Table 2. When air turbulence was artificially produced to an even minor degree, the observed dish motions included pitching, rolling or pendulum like oscillations but not rotations on a horizontal plane. As to seismic events the possibility of their producing dish rotations appears highly unlikely in view of the high number of sessions held (about 100), their long duration (up to one hour), and their being scheduled in different places (Naples and Calabria) and at different times of the year and of the day. Street traffic or underground work are also unlikely sources for comparable reasons. In addition, we have noted that the building hosting sessions in Naples is of a particularly strong making, and that traffic only occurs at about 60m from the experimental room. Likewise, the house in Calabria was recently built in a tourist village which is essentially traffic-free.

In view of these remarks it may not be unreasonable to assume that conscious and subconscious intentions of subjects might have been responsible of the telekinetic effects. The following considerations appear to support this hypothesis:

a) The highly variable amount of dish rotation recorded in the ten initial sessions (Table 1) is likely to reflect the biological diversity of the involved subjects and their different telekinetic capacities, in view of the uniform

experimental conditions adopted in all sessions. Of a more direct impact to the hypothesis is the decrement in rotation that was recorded in the second period of the majority of the sessions. This effect is likely to reflect a shift from a relaxed mental state due to the diverted attention from the forthcoming task to the more tense state associated with envisaging the proper mental strategy implementing the task. The alternative possibility that the decrement merely reflected a natural physical decline in rotation is not supported by the marked variations subjects expressed with respect to the putative control period which ranged from a 59% decrease to a 33% increase (Table 1). In addition, the strong increment in rotation occurring in the stress period of two subjects cannot be attributed than to their altered state of mind.

b) The conspicuous increments in dish rotation that were recorded in the S periods of several subjects that wished to rotate the dish (see Results and Table 3) may hardly be attributed to the concurrent presence of physical conditions in view of the large number of sessions in which these effects occurred. Two separate observations are also in agreement with the involvement of subjects' intentions. They regard the lack of an increased rotation that was recorded when the subject did not wish to rotate the dish, and conversely the very strong increment that occurred when the subject did wish to rotate the dish in the same session. It is also of interest that the two subjects who produced dish rotations in opposite directions when tested separately did elicit an apparent fusion of their contrasting effects when tested together. While these remarkable observations require to be confirmed in additional experiments, their occurrence suggests the involvement of mental features.

In conclusion, the larger waves of dish rotations occurring in the S periods of noS-S sessions, sometimes persisting in subsequent noS periods, may be attributed to the conscious intentions of the subject. By the same token, dish rotations recorded in the first period of the initial 10 sessions in which subjects were in the room but their intentions were diverted from the telekinetic task (Table 1) suggests that the mere presence of a subject, presumably mediated by his subconscious intentions, may initiate dish rotations. Comparable effects have previously been produced by human subjects wishing to modify the random output of different types of physical instruments (Dunne B.J. and Jahn R.G., 2005).

In a recent paper (Hansen and Lieberman, 2013) clearly related to our observations, the use of a torsion balance (a hemispheric steel mesh hanging over the subject's head) has been used to detect the presence of a human bioenergy field. Recorded motions could not be ascribed to physical factors since they included oscillations whose frequencies and amplitudes changed in time together with shifts in the oscillation center. These effects persisted albeit with diminished intensity up to one hour after the subject left the torsion balance. The comparable results obtained in our experiments are likewise not accounted by physical law. In addition, the frequent persistence of incremented dish rotations in noS periods following enhanced dish rotations in S periods demonstrates the persistence of enhanced rather than diminished dish rotations in the absence of subjects.

5 - REFERENCES

Alvarado C.S. (1993) Gifted subjects' contributions to psychical research: the case of Eusapia Palladino. *J. Soc. Psych. Res.* **59**, 269-292.

de Rochas A. (1906) *L'exteriorisation de la motricité*. Bibliothèque Chacornac, Paris, France.

Lodge O.J. (1894) Experience of unusual physical phenomena occurring in the presence of an entranced person Eusapia Paladino. *J. Soc. Psych. Res.* **6**, 306-360.

Bottazzi F. (1907) The unexplored regions of human biology: Observations and experiments with Eusapia Paladino. *Ann. Psych. Sci.* **6**, 149-156, 260-290, 377-422.

Giuditta A. (2010) The 1907 Psychokinetic Experiments by prof. Filippo Bottazzi. *J. Scient. Explor.*;24:495-512.

Dunne B.J. and Jahn R.G. (2005) Consciousness, information, and living systems. *Cell. Mol. Biol.* **51**.703-714.

Hansen J.N. and Lieberman J.A. (2013) Use of a torsion pendulum balance to detect and characterize what may be a human bioenergy field. *J. Scient. Explor.* **27**, 199-219.

ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI¹

Il *Rendiconto* pubblica le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Le Note dovranno essere inviate al segretario per posta elettronica in formato pdf. Il file finale dovrà incorporare tutti i font utilizzati nel documento originale.

La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice*¹ al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito.

Dimensioni delle pagine: lunghezza rigo, mm 125; altezza pagine, mm 190. Nella stampa su formato A4 il primo rigo della prima pagina inizia 80 mm al di sotto del margine superiore, quello delle altre pagine a 30 mm da detto margine.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici sono indicati nel testo tra parentesi (cognome primo autore, anno di pubblicazione). Se gli autori sono due si indicheranno entrambi, se più di due si indicherà il primo autore seguito da 'et al.' Nella sezione Bibliografia, i riferimenti bibliografici dovranno riportare quanto indicato nei seguenti esempi per periodici e libri:

Cognome A.B., Cognome C.D. [...] and Cognome E.F. (anno) Titolo. Rivista. Numero volume (grassetto), numeri pagina iniziale-finale.

Cognome G.H. and Cognome I.L. (anno) Titolo. Casa editrice, città, stato.

Le illustrazioni dovranno avere una risoluzione minima di 300 dpi e dimensioni non superiori a mm 125x180 comprensive dell'eventuale didascalia. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione.

¹ Una copia di queste istruzioni può essere scaricata all'indirizzo <http://www.liguori.it/areaautori/?c=normespeciali>, richieste di ulteriori informazioni possono essere inoltrate a hclpdesk@liguori.it

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori dovesse essere superiore a uno. Ulteriori estratti e/o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto, per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che inoltrerà agli interessati un preventivo di spesa (<http://www.liguori.it/servizi/?c=preprint>).

La struttura dettagliata del dattiloscritto è indicata come segue. Si precisa che tutti i righi vuoti hanno dimensioni TNR 11.

Prima pagina (vedi esempio nella pagina successiva)

Titolo: centrato, Times New Roman (TNR) 13, grassetto.

Autori: centrato, TNR 11. I numeri in alto a destra per indirizzi e affiliazioni di ciascun autore sono da precisare a fondo pagina, dopo un rigo vuoto e una linea di divisione di 50 mm.

Rigo vuoto.

Presentatore: centrato, TNR 10.

Data adunanza: centrato, in parentesi, TNR 10.

Due righi vuoti.

Key words: in inglese, TNR 10.

Rigo vuoto.

Abstract: in inglese, TNR 10.

Rigo vuoto.

Riassunto: in italiano, TNR 10.

Due righi vuoti.

1 - Introduzione, TNR 10, grassetto maiuscolo

Rigo vuoto.

Testo, TNR 11, giustificato, indentatura paragrafi 6 mm

Due righi vuoti.

Altre intestazioni, TNR 10, grassetto maiuscolo

Rigo vuoto.

Altro testo, TNR 11, giustificato, indentatura paragrafi 6 mm

Rigo vuoto.

Bibliografia, TNR 10

Sequenza delle possibili intestazioni:

2 – Materiali e metodi 3 – Risultati 4 – Discussione 5 – Conclusione
6 – Bibliografia.

Ringraziamenti in fondo all'ultima pagina, TNR 10.

Esempio di prima pagina

Analisi sismologiche fatte nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980

Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1*}

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

Key words: :stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

Abstract - Abstract written in English language, in Times New Roman 10, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 10, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 10, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 10, justified;

Riassunto - Scritto giustificato in Times New Roman 10, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 10, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 10, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 10, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 10, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 10, in italiano.

1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

1, 2.. Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

